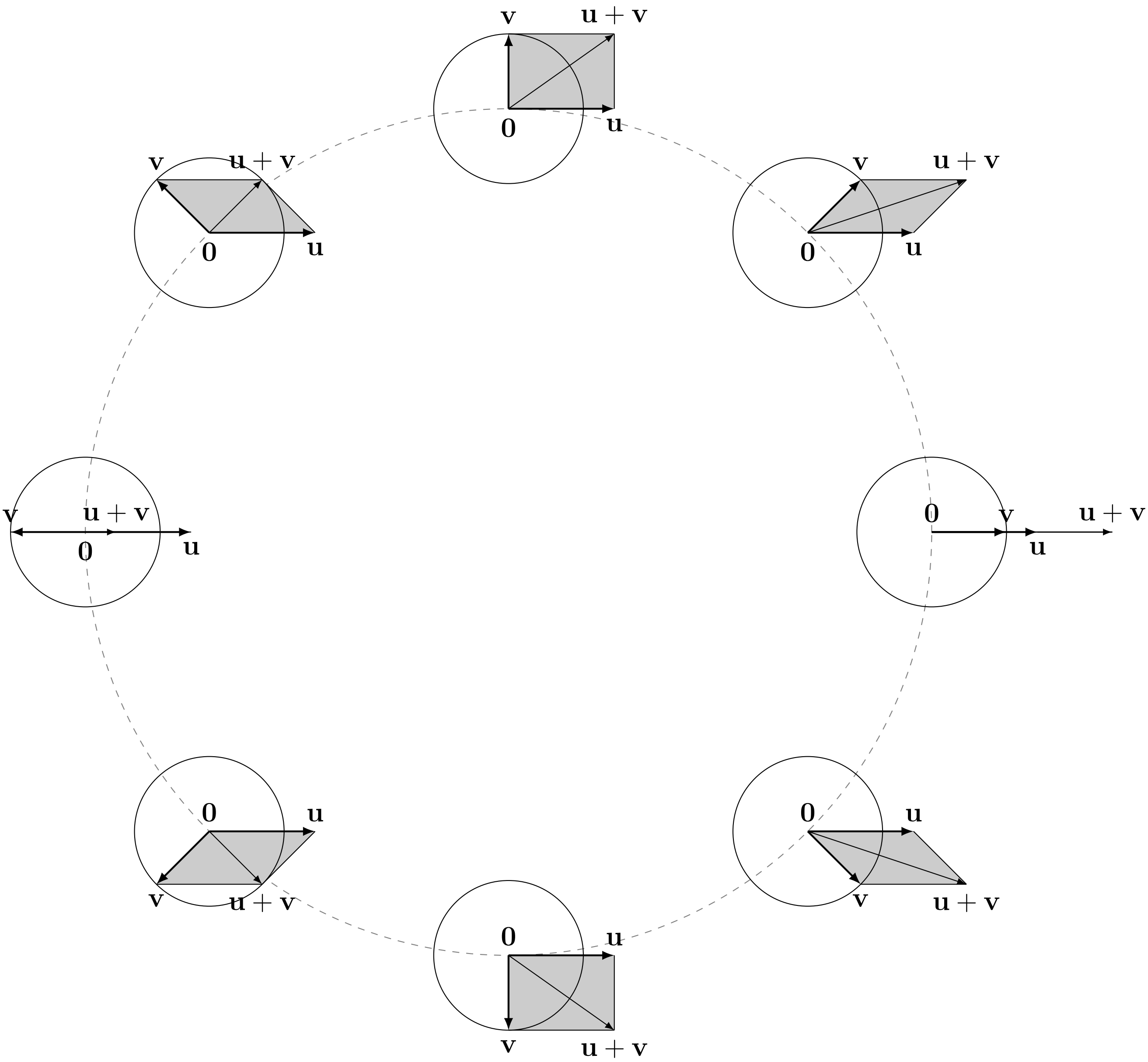
Curso de Álgebra Linear

Fundamentos e Aplicações

Terceira Edição



Marco Cabral Paulo Goldfeld

Curso de Álgebra Linear
Fundamentos e Aplicações

Terceira Edição
25 de Outubro de 2012

Marco A. P. Cabral
PhD Indiana University, EUA
Prof. IM – UFRJ
mapcabral@ufrj.br

Paulo Goldfeld
PhD Courant Institute, EUA
Prof. IM – UFRJ
goldfeld@labma.ufrj.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – Brasil

Ficha Catalográfica

Cabral, Marco A. P. e Goldfeld, Paulo
Curso de Álgebra Linear / Marco Cabral e Paulo Goldfeld - Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, 2012.

1. Álgebra Linear I. Título
CDD: 512.5
516.3

ISBN XX-XXXX-XXX-X

Sobre os Autores

Marco Aurélio Palumbo Cabral é carioca (natural do Rio de Janeiro) e tricolor (torcedor do fluminense). Fez o Bacharelado em Informática na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o doutorado em Matemática na Indiana University (Bloogminton, EUA). É professor no Instituto de Matemática na UFRJ. Suas áreas de interesse são equações diferenciais parciais (EDP), Análise Numérica e Finanças.

Paulo Goldfeld fez Bacharelado em Enhenharia Mecânica na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o doutorado em Matemática no Courant Institute (Nova Iorque, EUA). É professor no Instituto de Matemática na UFRJ. Sua área de interesse é métodos numéricos em equações diferenciais parciais (EDP).

Agradecimentos

Aos colegas do Departamento de Matemática Aplicada do IM–UFRJ que colaboraram de forma direta e indireta para este projeto. À Profa. Beatriz Malajovich (UniRio) pela ajuda com gabarito dos exercícios, ao Prof. Felipe Acker (UFRJ) por sugestão de morfismos, à Profa. Monique Carmona (UFRJ) por diversas sugestões de organização geral, ao Prof. Martin Weilandt (UFSC) pela revisão extensa da segunda edição.

Ao Prof. Jim Hefferon (Saint Michael's College Colchester, Vermont USA) cujo livro Linear Algebra, em licença Creative Commons, ajudou a inspirar este trabalho.

Aos alunos da UFRJ pelas correções de erros. Em particular os alunos Diego Cruz (aluno da Escola Politécnica), Igor Detoni (aluno do Instituto de Química).

Aos programadores que criaram os programas que permitiram a produção deste material. Este livro é herdeiro da cultura GPL (Gnu Public License), que permite o reuso de código fonte. Agradecemos:

- em primeiro lugar, Douglas Knuth pelo TEX, software que permite que este material seja tão bonito;
- Leslie Lamport pelo LATEX, pacote baseado no TEX;
- Linus Torvalds pelo kernel do sistema operacional GNU-Linux;
- Richard Stallman, responsável pelo projeto GNU, pelos diversos programas do sistema operacional GNU-Linux e milhares de pessoas por dezenas de softwares utilizados: `tar` (compactação de arquivos), `make` (gerenciador de programa), `aspell` (corretor ortográfico), `grep`, `find`, `ghostview`, `xpdf`, . . . ;
- Mark Shuttleworth criador da distribuição do Linux xubuntu que utilizei para produzir este livro;
- Bram Moolenaar pelo edito de texto Vim;
- Till Tantau pelo `TikZ` e `PGF` e Supoj Sutanthavibul, Brian Smith, Paul King e outros pelo `Xfig`, que possibilitaram a geração de gráficos tão bonitos;

- Raimundo dos Santos Moura pelo `vero` (Verificador Ortográfico em português);

- a WIKIPEDIA The Free Encyclopedia e seus milhões de colaboradores, por algumas figuras e ideias utilizadas em vários exemplos.

Prefácio

Para o estudante

Este livro tem como foco o aluno e suas dificuldades. A ordem de apresentação do conteúdo e a metodologia foram discutidas com vários colegas do departamento com grande experiência no ensino de Álgebra Linear na graduação e pós-graduação. Um exemplo disso é a concepção do primeiro capítulo, que explora a Geometria Analítica, em parte já vista pelos alunos no ensino médio, e introduz conceitos chaves da Álgebra Linear.

O livro possui cerca de 230 exemplos resolvidos. Procuramos destacar no texto os erros mais comuns dos alunos e estimular o uso de tecnologia em todos os capítulos. Incluímos num Apêndice um tutorial do software `WxMaxima`, disponível livremente na Internet (é software livre). Possui versões para MAC OS, WIndows e Linux.

É parte fundamental do curso resolver exercícios, tantos quanto for possível. Ao final de cada capítulo existem exercícios divididos em 4 grupos:

- **exercícios de fixação**: Devem ser feitos imediatamente após a leitura do texto. São de resposta imediata (cálculo mental ou conceitos simples). Não saber resposta correta sugere um retorno ao texto. Deve-se fazer todos antes de seguir adiante.

- **problemas**: São os principais exercícios do capítulo. Todos devem ser feitos.

- **problemas extras**: Caso o aluno já tenha feito todos os problemas.

- **desafios**: Para se aprofundar na disciplina. São opcionais.

Todos os **exercícios de fixação** e todos os **problemas** tem respostas no final do livro. Quase todos problemas extras e desafios também possuem respostas. Sao cerca de 90 exercícios de fixação, 110 problemas, 150 problemas extras e 80 desafios.

Porque um novo livro?

- Este livro pode ser aperfeiçoado por qualquer pessoa por ser disponibilizado através da licença, que permite o re-uso do material. Imaginamos que daqui a 100 anos o departamento de Matemática Aplicada da UFRJ ainda estará utilizando uma versão deste livro: todo o trabalho dos autores iniciais e subsequentes não será perdido. Para detalhes consulte: `http://creativecommons.org`.

- Permitir aos alunos de todo o Brasil acesso fácil (internet) a material gratuito e de qualidade por ser certificado pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFRJ e por colegas de todo o Brasil.

- Necessidade do nosso departamento, responsável pelo ensino de Álgebra Linear na UFRJ, incluindo toda Escola de Engenharia, de aplicar prova unificada e, consequentemente, criar um material padrão para o curso.

- Produzir um material com conteúdo que será efetivamente utilizado em sala de aula pelo aluno. Na nossa experiência, os alunos preferem livros finos, que são fáceis de transportar e estimulam a leitura.

- Produzir transparências para sala de aula diretamente acopladas a um livro.

Criamos um pacote completo para um curso de Álgebra Linear: além deste texto, foram produzidas transparências. Tudo isto está disponível em `www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros`

Como foi escolhido o material?

Determinamos os tópicos tomando por base o curso usualmente ministrado na UFRJ, cujo público alvo principal são alunos da Escola de Engenharia. Além disso o componente estético foi fundamental: os alunos devem perceber a beleza da Matemática. Algumas escolhas importantes foram feitas:

- **Capítulo inicial** apresenta conteúdo principal do curso sem grande formalismo: vetores e operações no $\mathbb{R}^n$, equações paramétricas e cartesianas, espaços gerados (retas e planos), combinações lineares, dependência e independência linear. Estes temas são retomados no capítulo de Espaços Vetoriais, mas acreditamos que é importante uma exposição, logo no início, destes conceitos.

- A **solução de sistemas lineares** é feita através da eliminação de Gauss. A regra de Cramer é uma seção opcional do capítulo de Determinantes. Interpretamos a solução de sistemas através de interpretações do produto matriz-vetor. Assim o conjunto-solução é visto com a linguagem de espaço gerado, apresentado no primeiro capítulo, e também do ponto de vista geométrico, interseção de retas, planos, hiperplanos, etc.

- **Espaços vetoriais de polinômios e funções** não são meros exemplos, são centrais para a formação de engenheiros, matemáticos e físicos. Algumas aplicações importantes são: equações diferenciais, aproximação de funções por polinômios e métodos numéricos como elementos finitos.

- **Matriz** aparece, inicialmente, somente como forma conveniente de resolver sistemas lineares. Após apresentar **transformações lineares** (TLs), matrizes são vistas como representações de TLs. Apresentamos TLs (e matrizes) geométricas: projeção, reflexão, rotação. Relacionamos operações de soma e composição de TLs com operações entre matrizes. Definimos o produto entre matrizes como consequência da composição de TLs. Fica claro que o produto de matrizes não é comutativo pois a composição de função (ainda que seja linear) não é comutativa. A matriz inversa é calculada por escalonamento.

- No capítulo de **produto interno** focamos em projeções e no método de mínimos quadrados. Apresentamos projeção ortogonal de funções como forma de aproximá-las, preparando o aluno para métodos numéricos.

- **Determinante** é definido inicialmente como área (volume) com sinal, para depois ser apresentado algebricamente. Optamos por focar no algoritmo de cálculo utilizando operações elementares por ser mais eficiente e ligada diretamente aos conceitos. Apresentamos a conexão com mudança de variáveis na integração múltipla e a definição de produto vetorial e misto em $\mathbb{R}^3$. Como seção opcional, colocamos uma discussão de como interpretar o sinal do determinante.

- **Autovalores e Autovetores** são apresentados em conexão com interpretação geométrica. A teoria de diagonalização de matrizes é aplicada em cálculo de potência de matrizes e classificação de formas quadráticas, relacionados com o teste da "derivada segunda" do cálculo diferencial de várias variáveis para determinar se um ponto crítico é máximo, mínimo ou ponto de sela local.

- Enfatizamos ao longo do texto (capítulos de Sistemas Lineares, Matrizes, Determinante, Autovalores e Autovetores) a visão moderna de uma **matriz por blocos**, fundamental para a computação científica.

- O **escalonamento** é o algoritmo principal do curso, pois através dele: resolvemos sistema, determinamos se vetores são linearmente dependentes, determinamos coordenadas de vetores, mudamos de base, invertemos matriz, calculamos determinante, encontramos autovetores, calculamos solução de mínimos quadrados, calculamos projeção ortogonal.

Sobre a Segunda Edição

Além de diversas correções pontuais, as principais modificações foram:

(a) juntar o capítulo de Transformações Lineares e de Matrizes em um único capítulo;

(b) expandir o primeiro capítulo na parte de geometria analítica no plano e espaço por ser deficiência comum que alunos trazem do ensino médio;

(c) reorganizar o capítulo de Produto Interno e colocá-lo antes do capítulo de Determinante. Focamos no $\mathbb{R}^n$ e em aplicações importantes.

Sumário

Sobre os Autores **iii**

Agradecimentos **v**

Prefácio **vii**

1 Introdução à Álgebra Linear **1**

1.1 Vetores do $\mathbb{R}^n$ e Operações . . . 1
1.1.1 Vetores do $\mathbb{R}^n$ . . . 1
1.1.2 Operações com Vetores em $\mathbb{R}^n$ . . . 2
1.1.3 Representação Geométrica de Vetores e Operações . . . 3
1.2 Equações Cartesianas e Parametrização . . . 5
1.2.1 Retas no $\mathbb{R}^2$ . . . 5
1.2.2 Retas e Planos no $\mathbb{R}^3$ . . . 8
1.3 Combinações Lineares e Espaços Gerados . . . 13
1.3.1 Definições . . . 13
1.3.2 Espaço Gerado por 1 Vetor e Retas em $\mathbb{R}^n$ . . . 18
1.3.3 Espaço Gerado por 2 Vetores e Planos no $\mathbb{R}^n$ . . . 19
1.3.4 Espaço Gerado por 3 ou Mais Vetores . . . 20
1.4 Exercícios de Introdução à Álgebra Linear . . . 22
1.4.1 Exercícios de Fixação . . . 22
1.4.2 Problemas . . . 23
1.4.3 Extras . . . 24
1.4.4 Desafios . . . 24

2 Sistema Linear **27**

2.1 Aplicações de Sistemas Lineares . . . 27
2.2 Matrizes e Vetores do $\mathbb{R}^n$ . . . 30
2.3 Interpretação de Sistemas em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ . . . 31
2.3.1 Na Reta ($\mathbb{R}$) . . . 31
2.3.2 No Plano ($\mathbb{R}^2$) . . . 32
2.3.3 No Espaço ($\mathbb{R}^3$) . . . 35
2.4 Operações Elementares e Sistemas Equivalentes . . . 36
2.5 Resolvendo Sistemas Lineares . . . 41
2.5.1 Escalonamento . . . 41
2.5.2 Análise Pós-Escalonamento . . . 45
2.5.3 Sistemas com Infinitas Soluções . . . 47
2.6 Produto Matriz-Vetor . . . 52
2.7 Sistemas Homogêneos, Solução Geral e Particular . . . 55

2.8 Interpretação de Sistemas em $\mathbb{R}^n$ . . . 56
2.9 Exercícios de Sistemas Lineares . . . 58
2.9.1 Exercícios de Fixação . . . 58
2.9.2 Problemas . . . 60
2.9.3 Extras . . . 61
2.9.4 Desafios . . . 63

3 Espaço Vetorial 65
3.1 Espaço e Subespaço Vetorial . . . 65
3.2 Combinação Linear e Espaço Gerado . . . 70
3.3 Dependência e Independência Linear . . . 71
3.4 Base e Dimensão . . . 72
3.5 Polinômios e Funções como Vetores . . . 76
3.5.1 Definição e Exemplos . . . 76
3.5.2 Combinação Linear e Espaço Gerado . . . 78
3.5.3 Dependência e Independência Linear, Base . . . 80
3.5.4 ⋆Funções como Vetores: Representação Geométrica . . . 81
3.6 ⋆Dimensão de Espaço Vetorial: Teoria . . . 83
3.7 Exercícios de Espaços Vetoriais . . . 85
3.7.1 Exercícios de Fixação . . . 85
3.7.2 Problemas . . . 86
3.7.3 Extras . . . 88
3.7.4 Desafios . . . 89

4 Transformação Linear e Matriz 91
4.1 Função, Transformação Linear e Matriz . . . 92
4.1.1 Domínio e Imagem de Função . . . 92
4.1.2 Transformação Linear e Matriz . . . 92
4.1.3 Transformações Lineares Geométricas . . . 95
4.2 Núcleo e Imagem . . . 99
4.2.1 Núcleo e Imagem . . . 99
4.2.2 Teorema do Núcleo Imagem . . . 102
4.2.3 Injetividade, Sobrejetividade e Núcleo . . . 104
4.2.4 Aplicações em Espaços de Funções e Polinômios . . . 106
4.3 Composição de Funções e Produto de Matrizes . . . 107
4.3.1 Composição de Funções e TLs . . . 107
4.3.2 Produto Matriz-Matriz . . . 108
4.4 Função e Matriz Inversa . . . 111
4.4.1 Função Inversa e TLs . . . 111
4.4.2 Matriz Inversa . . . 112
4.5 Álgebra das Matrizes e TLs . . . 114
4.5.1 Álgebra de Matrizes . . . 114
4.5.2 ⋆Álgebra das TLs . . . 116
4.6 Matriz em Blocos . . . 117
4.7 ⋆Matriz Representando Vetor: Coordenadas . . . 118
4.8 ⋆Matriz Representando TL: Mudança de Base . . . 122
4.9 Exercícios de Transformações Lineares . . . 126
4.9.1 Exercícios de Fixação . . . 126
4.9.2 Problemas . . . 128

4.9.3 Extras . . . 130
4.9.4 Desafios . . . 134

5 Produto Interno 137
5.1 Produto Interno em $\mathbb{R}^n$ . . . 137
5.2 Complemento Ortogonal . . . 140
5.3 Aplicação: Mínimos Quadrados . . . 143
5.4 Aplicação: Projeção Ortogonal e Reflexão . . . 148
5.5 ⋆Mínimos Quadrados e Projeção: Teoria . . . 151
5.6 ⋆Aplicação: Aproximando Funções por Polinômios . . . 151
5.7 ⋆Cauchy-Schwarz e Ângulo . . . 155
5.8 ⋆Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt . . . 156
5.9 Exercícios de Produto Interno . . . 161
5.9.1 Exercícios de Fixação . . . 161
5.9.2 Problemas . . . 162
5.9.3 Extras . . . 163
5.9.4 Desafios . . . 165

6 Determinante 167
6.1 Motivação Geométrica . . . 167
6.2 Definição e Propriedades Básicas . . . 171
6.3 Calculando Determinante . . . 173
6.3.1 Fórmula do Determinante em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: Regra de Sarrus . . . 173
6.3.2 Algoritmo para Cálculo do Determinante . . . 174
6.4 Mais Propriedades . . . 177
6.5 Determinante e Mudança de Área . . . 181
6.6 Produto Vetorial e Misto . . . 183
6.7 ⋆Sinal do Determinante . . . 184
6.8 ⋆Regra de Cramer . . . 186
6.9 Exercícios de Determinantes . . . 187
6.9.1 Exercícios de Fixação . . . 187
6.9.2 Problemas . . . 188
6.9.3 Extras . . . 190
6.9.4 Desafios . . . 192

7 Autovetores e Diagonalização 195
7.1 Autovalores e Autovetores . . . 195
7.2 Diagonalização . . . 201
7.3 Aplicações . . . 205
7.4 Exercícios de Autovetores e Diagonalização . . . 209
7.4.1 Exercícios de Fixação . . . 209
7.4.2 Problemas . . . 210
7.4.3 Extras . . . 212
7.4.4 Desafios . . . 214

A Respostas dos Exercícios 217
A.1 Introdução à Álgebra Linear . . . 217
A.1.1 Exercícios de Fixação . . . 217
A.1.2 Problemas . . . 217

A.1.3 Extras . . . 218
A.1.4 Desafios . . . 218
A.2 Sistemas Lineares . . . 218
A.2.1 Exercícios de Fixação . . . 218
A.2.2 Problemas . . . 219
A.2.3 Extras . . . 220
A.2.4 Desafios . . . 221
A.3 Espaços Vetoriais . . . 221
A.3.1 Exercícios de Fixação . . . 221
A.3.2 Problemas . . . 222
A.3.3 Extras . . . 223
A.3.4 Desafios . . . 224
A.4 Transformações Lineares . . . 224
A.4.1 Exercícios de Fixação . . . 224
A.4.2 Problemas . . . 225
A.4.3 Extras . . . 227
A.4.4 Desafios . . . 230
A.5 Produto Interno . . . 231
A.5.1 Exercícios de Fixação . . . 231
A.5.2 Problemas . . . 232
A.5.3 Extras . . . 232
A.5.4 Desafios . . . 233
A.6 Determinantes . . . 234
A.6.1 Exercícios de Fixação . . . 234
A.6.2 Problemas . . . 234
A.6.3 Extras . . . 234
A.6.4 Desafios . . . 235
A.7 Autovetores e Diagonalização . . . 236
A.7.1 Exercícios de Fixação . . . 236
A.7.2 Problemas . . . 236
A.7.3 Extras . . . 238
A.7.4 Desafios . . . 240

B Tutorial do Maxima 243
B.1 Entrando com Matriz e Vetor . . . 243
B.2 Funções . . . 243
B.3 Resolvendo Sistemas Lineares . . . 244
B.4 Escalonando Matriz Automaticamente . . . 244
B.5 Escalonando Matriz Manualmente . . . 244
B.6 Espaço linha e coluna, Núcleo e Posto de Matriz . . . 244
B.7 Produto Escalar, Matriz-Vetor e Matriz-Matriz . . . 245
B.8 Matriz Inversa, Determinante e Traço . . . 245
B.9 Complemento Ortogonal . . . 245
B.10 Mínimos Quadrados . . . 245
B.11 Projeção e Reflexão . . . 245
B.12 Aproximando Função por Polinômio . . . 246
B.13 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt . . . 247
B.14 Autovalores e Autovetores . . . 247
B.15 Diagonalização . . . 247

B.16 Criando Exercícios e Exemplos 248
B.16.1 Matrizes Para Escalonar Manualmente 248
B.16.2 Sistemas Com Solução Inteira 248
B.16.3 Determinante é um Inteiro 248
B.16.4 Matriz e Inversa são Inteiras 248
B.16.5 Matrizes com autovalores e autovetores inteiros 249

Referências Bibliográficas **251**

Índice Remissivo **252**

Capítulo 1

Introdução à Álgebra Linear

Este capítulo apresenta conceitos da Álgebra Linear que surgem da geometria analítica no plano e espaço e da busca de solução de sistemas lineares:

(a) vetores e operações no $\mathbb{R}^n$: soma e multiplicação por escalar (produto escalar-vetor);

(b) equação cartesiana e parametrização da reta e do plano e suas generalizações;

(c) combinação linear, espaço gerado, independência linear, dimensão do espaço gerado e suas relações com resolução de sistema linear;

(d) espaço gerado por 1, 2, 3 ou mais vetores, associando-os com pontos, retas, planos e generalizações;

Estes conceitos serão reaplicados (no Capítulo 3 Espaço Vetorial) em contextos onde os vetores poderão ser polinômios, funções, matrizes, ou elementos abstratos.

Embora sistemas lineares apareçam quando aplicamos estes conceitos, o curso de Álgebra Linear é muito mais do que somente um curso de como resolver sistemas lineares. Caso começássemos com a resolução de sistemas lineares — assunto que o aluno, com frequência, **pensa que domina** — o aluno teria a sensação de que Álgebra Linear é um curso fácil, de revisão e aprofundamento de técnicas para resolução de sistemas lineares.

1.1 Vetores do $\mathbb{R}^n$ e Operações

1.1.1 Vetores do $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1 (vetor, entradas e o $\mathbb{R}^n$) *Um* ***vetor*** *do $\mathbb{R}^n$ é um uma lista ordenada de n números reais. Dizemos que é uma n-upla de números reais.*

A notação utilizada para representar um vetor é $\mathbf{u} = (a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n)$ com $a_i \in \mathbb{R}$. Os número a_i's são chamados de ***entradas*** *do vetor $\mathbf{u}$.*

O $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de n-uplas de números reais.

Exemplo 1.1 *São vetores de $\mathbb{R}^2$: $(-6, -8),\ (1, 2)$.*
São vetores de $\mathbb{R}^4$: $(1, 2, 3, 4)$, $(-2, 7/4, -1, 2/3)$.
São vetores de $\mathbb{R}^5$: $(-1, 2, 4, 6, 8)$, $(1, 2, 7/4, -1/3, 3)$.

[1]Versão 05.out.2012 03h

Observação 1.1 *Como um vetor é uma lista* ***ordenada*** *de números, são distintos entre si os vetores* $(-1,2)$ *e* $(-2,1)$ *e também* $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ *e* $(3,1,2)$.

Observação 1.2 ***Porque*** $\mathbb{R}^n$ ***com*** $n > 3$***?***
Embora nossa (humana) percepção esteja restrita a três dimensões, em simulações computacionais de diversos modelos, por exemplo para estudar as forças atuantes na estrutura de um prédio, dividimos o mesmo em "bloquinhos" no computador e associamos a cada bloquinho uma variável. Quanto maior o número de bloquinhos mais precisa será a simulação: n *pode ser tão grande quanto se queira. Leia também Observação 2.1 da p.29.*

1.1.2 Operações com Vetores em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.2 (Soma de vetores) *Dados vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *definimos o vetor* ***soma*** *de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *denotado por* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, *por*

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \ldots,\ u_n+v_n).$$

Exemplo 1.2 *A soma dos vetores do* $\mathbb{R}^4$ $(1,-1,1/4,-2/3) + (-2,2,3/4,5/3) = (1-2,-1+2,1/4+3/4,-2/3+5/3) = (-1,1,1,1)$.

Observação 1.3 *Note que o sinal "+" (mais) em "*$\mathbf{u}+\mathbf{v}$*" e "*$(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$*" possui significado distinto em cada expressão: soma de vetores, num caso, e de soma de números reais (escalares) no outro.*

Definição 1.3 (origem ou vetor nulo) *Definimos como* ***origem*** *ou* ***vetor nulo***, *denotado por* $\mathbf{0}$ *o vetor* $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$*(todas as entradas são nulas). Note que este vetor é o elemento neutro da soma de vetores pois* $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v}$.

Definição 1.4 (multiplicação por escalar ou produto escalar-vetor) *Dados o vetor* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e o escalar* $t \in \mathbb{R}$, *definimos o vetor multiplicação de* t *por* $\mathbf{u}$, *denotado por* $t\mathbf{u}$, *por*

$$t\mathbf{u} = (tu_1,\ tu_2, \ldots,\ tu_n).$$

Por contraste com vetores, um número real é chamado de **escalar**. Esta linguagem vem da Física, que distingue grandezas vetoriais (forças por exemplo) de grandezas escalares (massa e temperatura por exemplo).

Exemplo 1.3 *Se* $\mathbf{u} = (-1,3,1,-2,3/2)$, *então* $2\mathbf{u} = 2(-1,3,1,-2,3/2) = (-2,6,2,-4,3)$. *Considere* $\mathbf{w} = (-4,6,1,-3)$. *Então* $-1/2\mathbf{w} = -1/2(-4,6,1,-3) = (2,-3,-1/2,3/2)$.

Observação 1.4 *Dizemos que o* $\mathbb{R}^n$ *munido das operações de soma de vetores (Def. 1.2) e produto por um escalar (Def. 1.4) é um* ***espaço vetorial*** *sobre* $\mathbb{R}$.
De forma análoga definimos o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.5 (múltiplo ou paralelo) *Dizemos que* $\mathbf{v}$ *é* ***múltiplo de*** *(ou paralelo a)* $\mathbf{w}$ *se existe um escalar* t *tal que* $\mathbf{v} = t\mathbf{w}$.

Exemplo 1.4 *São paralelos entre si:* $(-2,4,-6,1)$ *e* $(1,-2,3,-1/2)$ *pois* $(-2,4,-6,1) = -2(1,-2,3,-1/2)$ *e* $(1,-2,3,-1/2) = -1/2(-2,4,-6,1)$.

Exemplo 1.5 *O vetor* $\mathbf{0}$ *é paralelo ou múltiplo de qualquer outro pois* $\mathbf{0} = 0\mathbf{w}$ *para qualquer* $\mathbf{w}$.

1.1.3 Representação Geométrica de Vetores e Operações

Começamos identificando, da maneira usual, um plano com $\mathbb{R}^2$ e o espaço com $\mathbb{R}^3$ utilizando o sistema de coordenadas cartesiana, com eixos ortogonais entre si.

Um vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado geometricamente por um **segmento de reta orientado** que une $(0, 0)$ com (a, b). Para indicar a orientação do segmento utilizamos uma "setinha" (daqui por diante sem aspas e utilizado como sinônimo de segmento orientado). Podemos fazer o mesmo com vetores em $\mathbb{R}^3$. Mostramos na Figura 1.1 os vetores $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $(1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$.

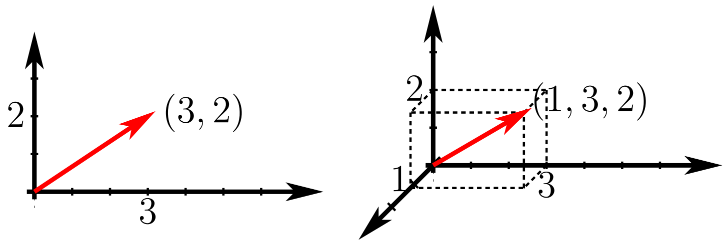


Figura 1.1: Vetores no Plano e no Espaço

Além de representar o vetor como uma setinha partindo da origem $(0, 0)$, pode-se representá-lo transladando a setinha e partindo de um ponto qualquer $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.6 (setinha e vetor) *A setinha que começa em* $(c,\ d)$ *e termina em* $(c+a,\ d+b)$ *representa o mesmo vetor* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *para quaisquer* $c, d \in \mathbb{R}$. *A setinha que começa em* $(d,\ e,\ f)$ *e termina em* $(d + a,\ e + b,\ f + c)$ *representa o mesmo vetor* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *para quaisquer* $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Por esta definição o mesmo vetor possui uma infinidade de representações. Duas setinhas representam o mesmo vetor se, após deslocarmos paralelamente uma delas para que seus pontos iniciais coincidam, o ponto final delas também coincide. Por exemplo, todas as setinhas representadas na Figura 1.2 representam o mesmo vetor $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$.

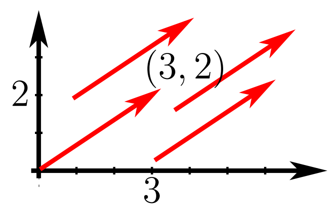


Figura 1.2: Representações do vetor $\mathbf{v} = (3, 2)$

A representação geométrica[1] é importante em aplicações (Física por exemplo) e para desenvolver a intuição para espaços de dimensões maiores.

Podemos interpretar geometricamente, utilizando esta representação por setinhas, a **soma de dois vetores** no plano e no espaço. Considere a Figura 1.3, no lado esquerdo, onde dois vetores são representados com suas componentes no eixo x e y. Pela **regra do triângulo** representamos o primeiro vetor com ponto inicial na origem e o segundo com ponto inicial na ponta da seta do primeiro. O vetor resultante unindo a origem até a ponta da seta do

[1]Embora seja útil para a intuição, nada do que fazemos depende desta interpretação geométrica.

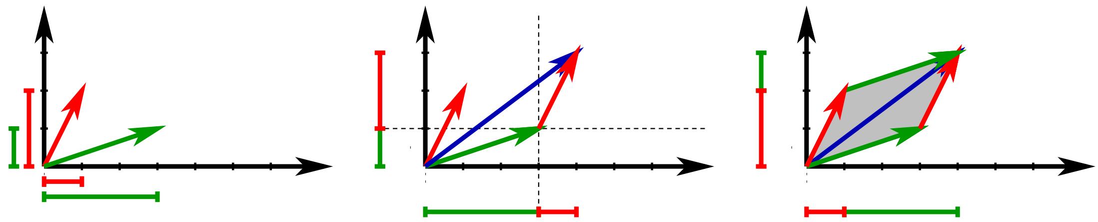


Figura 1.3: Regra do Triângulo e do Paralelogramo

segundo é o vetor soma. Pela **regra do paralelogramo**, aplicamos a regra do triângulo aos dois vetores, conforme apresentado nesta mesma figura.

Observação 1.5 *Podemos, numa abordagem geométrica, definir a soma de vetores pela* ***regra do paralelogramo ou triângulo****. Fazer isto em dimensão maior que três não é intuitivo. Em contraste, a Definição 1.2 da p.2, feita de forma algébrica, não depende de visualização geométrica e é muito simples. Convidamos o leitor a verificar que estas definições são equivalentes.*

Exemplo 1.6 *Podemos aplicar a regra do triângulo em sequência para obter a soma de mais de dois vetores. Por exemplo considere os quatro vetores representados no lado esquerdo da Figura 1.4. Concatenando de forma sucessiva os vetores obtemos sua soma conforme indicado na mesma figura no lado direito.*

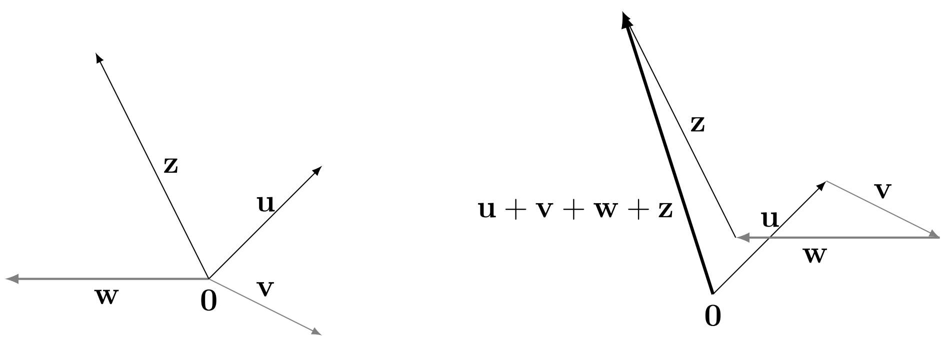


Figura 1.4: Soma de 4 vetores

A interpretação geométrica do **produto escalar-vetor** depende do módulo e do sinal do escalar. Começando por valores positivos inteiros, observe que multiplicando por 1 preservamos o vetor (e o tamanho), por 2 duplicamos seu tamanho, por 3 triplicamos seu tamanho. Por outro lado, multiplicando por $1/2$ reduzimos seu tamanho pela metade. De forma geral, multiplicando por valor positivo com módulo maior que 1 obtemos um vetor com mesmo sentido mas com tamanho maior; multiplicando por valor positivo com módulo menor que 1 obtemos um vetor com mesmo sentido mas com tamanho menor. Multiplicando por valor negativo obtemos vetor com sentido invertido e com tamanho maior ou menor de acordo com módulo ser maior ou menor que 1. Veja o vetor $\mathbf{u} = (3, 2)$ e a representação de $1\mathbf{u}$, $1,5\mathbf{u}$, $0,5\mathbf{u}$ e $-\mathbf{u}$ da Figura 1.5.

Portanto, variando o valor do escalar e multiplicando-o por um vetor fixo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ obtemos uma reta passando pela origem. Assim $\{t\mathbf{u}|\ t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta e a equação $t\mathbf{u}$ é chamada de **parametrização da reta** que passa pela origem com direção $\mathbf{u}$. A motivação geométrica vem quando $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mas continuamos chamando de reta com $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

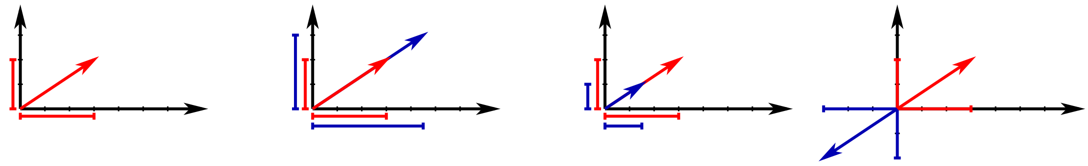


Figura 1.5: Vetores $1\mathbf{u}$, $\frac{3}{2}\mathbf{u}$, $\frac{1}{2}\mathbf{u}$ e $-\mathbf{u}$

Observação 1.6 ***O que é, de fato, um vetor?***
A visão geométrica (Definição 1.6 da p.3), embora mais intuitiva, é limitante pois não conseguimos visualizar mais do que três dimensões. É formalizada como segmentos orientados equivalentes. Este caminho é bom para certas generalizações em Matemática (no contexto da Geometria Diferencial por exemplo), para a visualização de vetores no plano e no espaço tridimensional e para interpretação Física (forças). São chamados em alguns livros de ***vetores geométricos****.*
Por contraste, a visão algébrica (Definição 1.1 da p.1) é bem mais simples mas não apresenta nenhuma motivação geométrica. Como não dependemos de intuição geométrica, trabalhamos com a mesma facilidade em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^{30}$. São chamados em alguns livros de ***vetores algébricos****.*
Faremos com frequência a passagem da visão algébrica para geométrica e vice-versa.

1.2 Equações Cartesianas e Parametrização

1.2.1 Retas no $\mathbb{R}^2$

Equação Cartesiana da Reta em $\mathbb{R}^2$

Definição 1.7 (eq. cartesiana da reta em $\mathbb{R}^2$) *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, chamamos de* ***equação cartesiana da reta*** *a equação $ax + by = c$, que representa o conjunto (a reta);*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ ax + by = c\right\}.$$

Observação 1.7 *Note que equações diferentes podem representar a mesma reta. Por exemplo, $7x - 3y = 2$ e $-14x + 6y = -4$ representam a mesma reta (porque?). Dizemos que as equações são* ***equivalentes****.*

Exemplo 1.7 *Determine a equação cartesiana da reta que passa por:*
(a) $(1, 2)$ e $(-2, 3)$; *(b)* $(1, 3)$ e $(1, 7)$.

Solução: *(a) Temos que resolver o sistema* $\begin{cases} 1a + 2b &= c, \\ -2a + 3b &= c. \end{cases}$ *Multiplicando a primeira equação por 2 e somando com a segunda obtemos $7b = 3c$. Logo $b = 3/7c$. Da primeira equação, $a = c - 2b = c - 6/7c = c/7$. Agora tomando $c = 7$ obtemos que $a = 1$ e $b = 3$. Logo é a reta $x + 3y = 7$. Agora verifique a resposta substituindo os pontos: $1 + 3 \times 2 = 7$ e $-2 + 3 \times 3 = 7$. Poderia se fixar $c = 1$ ou outra constante não-nula qualquer (faça isso!) e obter equações equivalentes.*

(b) Temos que resolver o sistema $\begin{cases} 1a + 3b &= c, \\ 1a + 7b &= c. \end{cases}$ *Subtraindo da segunda equação, a primeira: $4b = 0$. Assim $b = 0$. Logo $a = c$. Fixando $c = 1$ (outros valores gerarão equações equivalentes) obtemos a reta $x = 1$.* ■

Exemplo 1.8 *Determine a interseção da reta $2y - 7x = -3$ com os eixos x e y.*
Solução: *Tomando $x = 0$ (é eixo y! Porque?) obtemos $y = -3/2$ e a interseção com eixo y é $(0,\ -3/2)$. Tomando $y = 0$ (é eixo x! Porque?) obtemos $x = 3/7$ e a interseção com eixo x é $(3/7,\ 0)$.* ■

Parametrização da Reta em $\mathbb{R}^2$

Pela definição do produto escalar-vetor (ver Figura 1.5 da p.5), dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a equação $t\mathbf{u}$ é uma reta passando pela origem na direção $\mathbf{u}$. Somando um vetor $\mathbf{w}$ a cada elemento deste conjunto transladamos a reta $t\mathbf{u}$ que passa pela origem e obtemos a reta $\mathbf{w} + t\mathbf{u}$, conforme indicado na Figura 1.6.

Definição 1.8 (parametrização da reta) *Dados $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{w}$ chamamos $\{\mathbf{w} + t\mathbf{u} |\ t \in \mathbb{R}\}$ (ver Figura 1.6) de* ***parametrização da reta*** *paralela ao vetor $\mathbf{u}$ passando por $\mathbf{w}$. O $t \in \mathbb{R}$ é chamado de* ***parâmetro****.*

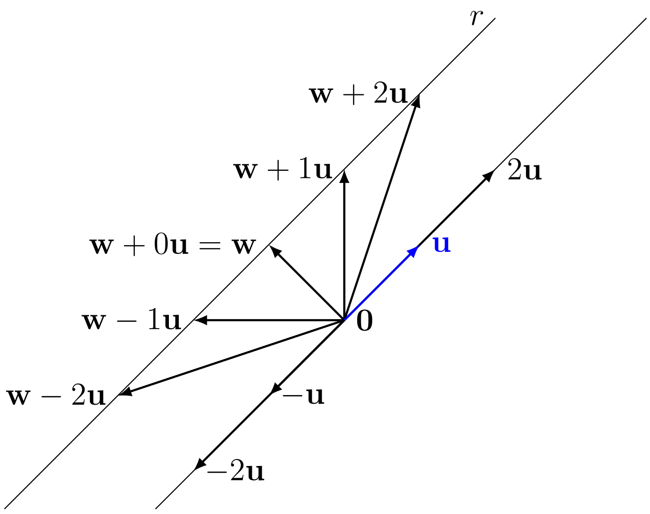


Figura 1.6: Reta $r = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$

Observação 1.8 (vetor é ponto?) *Na Figura 1.6 apresentamos três interpretações geométricas de vetor simultaneamente: como seta começando na origem (o vetor $\mathbf{w}$), como seta começando em ponto qualquer (os vetores $1\mathbf{u}, 2\mathbf{u}, -1\mathbf{u}, -2\mathbf{u}$) e como pontos (os pontos da reta $\mathbf{w} + 1\mathbf{u}, \mathbf{w} + 2\mathbf{u}$, etc.).*

Observação 1.9 *Se uma reta r passa pelos pontos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, um vetor paralelo à r é $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$. Faça uma figura se convencendo disso. Assim sua parametrização é $\mathbf{p}_1 + t\mathbf{u}$.*

Exemplo 1.9 *Considere a reta $r = \{(1, 2) + t(4, 6) |\ t \in \mathbb{R}\}$.*
(a) Determine pontos de r; *(b) Verifique se $(-5, 2) \in r$.*
Solução: *(a) Colocando $t = 0$ obtemos o ponto $(1, 2) \in r$. Colocando $t = 1$ obtemos o ponto $(1, 2) + 1(4, 6) = (5, 8) \in r$. Colocando $t = 0,5$ obtemos o ponto $(1, 2) + 0,5(4, 6) = (3, 5) \in r$. Colocando $t = -1$ obtemos o ponto $(1, 2) - 1(4, 6) = (-3, -4) \in r$. Colocando $t = -0,5$ obtemos o ponto $(1, 2) - 0,5(4, 6) = (-1, -1) \in r$.*

(b) Temos que ver se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 2) + t(4, 6) = (-5, 2)$ resolvendo o sistema $\begin{cases} 1 + 4t = -5 \\ 2 + 6t = 2 \end{cases}$. Da primeira equação $t = -3/2$, da segunda $t = 0$! O sistema é sem solução. Portanto $(-5, 2) \notin r$. ■

Exemplo 1.10 *A mesma reta pode ser gerada por vetores distintos, basta que eles sejam paralelos entre si. Por exemplo os conjuntos* $\{t(1,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$ *e* $\{m(4,4) |\ m \in \mathbb{R}\}$ *representam a mesma reta. De fato o vetor* (t,t) *pode ser escrito como* $t/4(4,4)$*. Tomando* $m = t/4$ *observamos que formam o mesmo conjunto.*

Equação Cartesiana da reta → Parametrização em $\mathbb{R}^2$
Para passar de equação cartesiana para parametrização de reta em $\mathbb{R}^2$: Coloque uma das variáveis como o parâmetro e determine a outra variável em função do parâmetro.

Exemplo 1.11 *Determine uma parametrização para a reta:*
(a) $2x - 3y = 6$*;* *(b)* $y = 7$*;* *(c) que passa por* $(1,2)$ *e* $(-2,1)$*.*
Solução: *(a) Coloque* $y = t$*. Agora* $x = 3+3/2y = 3+3/2t$*. Assim* $(x,y) = (3+3/2t,\ t) = (3,\ 0) + t(3/2,\ 1)$*. Logo,* $\{(3,0) + t(3/2,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.*
(b) Coloque $x = t$*,* $y = 7$*. Logo* $(x,y) = (0,7) + t(1,0)$*.*
(c) O vetor $\mathbf{u} = (1,2) - (-2,1) = (3,1)$ *é paralelo à reta. Logo* $\{(1,2) + t(3,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$ $= \{(-2,1) + t(3,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*. Outra possibilidade é tomar* $\mathbf{u} = (-2,1) - (1,2) = (-3,-11)$*:* $\{(1,2) + t(-3,-1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.* ■

Observação 1.10 *Se colocarmos* $y = t$ *no exemplo anterior item (b) obteremos que* $t = 7$ *e não teremos valor para* x*! A escolha de quem vai ser o parâmetro é **importante**. Aprenderemos a fazer a escolha certa de forma sistemática no (próximo) Capítulo Sistema Linear (p.27). Veja caso similar na Observação 1.14 da p.12.*

Exemplo 1.12 *A mesma reta possui diversas parametrizações (veja solução do último exemplo (c)). Verifique quais retas são iguais à reta* $\{(1,-2) + t(3,-2) |\ t \in \mathbb{R}\}$*:*
(a) $\{(-2,0) + t(-3,2) |\ t \in \mathbb{R}\}$*;* *(b)* $\{(-1,2) + t(3,-2) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.*
Solução: *(a) Temos que ver se existem* $s,t \in \mathbb{R}$ *tais que* $(1,-2) + t(3,-2) = (-2,0) + s(-3,2)$*. Isto resulta no sistema* $\begin{cases} 1+3t = -2-3s \\ -2-2t = 0+2s \end{cases}$*. Resolvendo vemos que as duas equações são equivalentes a* $t + s = 1$*. Assim a solução é* $t = 1 - s$*: as retas são idênticas.*
(b) Temos que ver se existem $s,t \in \mathbb{R}$ *tais que* $(1,-2) + t(3,-2) = (-1,2) + s(3,-2)$*. Isto resulta no sistema* $\begin{cases} 1+3t = -1+3s \\ -2-2t = 2-2s \end{cases}$*. O sistema é sem solução pois devemos ter* $t - s = -2/3 = -1$*! Logo não é a mesma reta e elas são paralelas entre si (não possuem interseção).* ■

Parametrização da reta → Equação cartesiana em $\mathbb{R}^2$
Para passar de uma parametrização para equação cartesiana de reta em $\mathbb{R}^2$: Determine o parâmetro em função de uma das variáveis e substitua na outra equação.

Exemplo 1.13 *Determine uma equação cartesiana para a reta:*
(a) $\{(2,3) + t(1,2) |\ t \in \mathbb{R}\}$*;* *(b)* $\{(5,3) + t(0,-1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.*
Solução: *(a) Como* $x = 2 + 1t$*,* $t = x - 2$*. Da segunda equação,* $y = 3 + 2t = 3 + 2(x-2)$*. Logo* $y - 2x = -1$*.*
(b) Como $x = 5$ *e* $y = 3 - t$*,* y *pode assumir qualquer valor e* x *é sempre constante. Assim a equação cartesiana é* $x = 5$*.* ■

Exemplo 1.14 *Determine a interseção da reta* $\{(1,0)+t(2,1)|\ t\in\mathbb{R}\}$ *com cada uma das retas abaixo, caso exista, e determine se são paralelas ou coincidentes:*

(a) $2x-3y=4$; *(b)* $x-2y=1$; *(c)* $\{(0,1)+t(0,2)|\ t\in\mathbb{R}\}$.

Solução: *(a) Como* $x=1+2t, y=t$*, substituindo na outra equação* $2(1+2t)-3t=4$*. Assim* $t=2$ *e as retas se interceptam em* $(5,2)$*.*

(b) Substituindo, $(1+2t)-2t=1$ *é equivalente a* $1=1$*: sempre verdade! Logo as retas são coincidentes, pois é verdade para todo* t*.*

(c) Queremos saber se existem $t,s\in\mathbb{R}$ *tais que* $(1,0)+t(2,1)=(0,1)+s(0,2)$ *(note que trocamos o segundo* t *por* s*). Precisamos resolver o sistema* $\begin{cases} 1+2t=0+0s \\ 0+t=1+2s \end{cases}$*, cuja solução única é* $t=-1/2$*,* $s=-3/4$*. Assim o ponto de interseção é* $(1,0)-1/2(2,1)=(0,-1/2)$*.* ■

Exemplo 1.15 *Determine a interseção da reta* $\{(-2,-3)+t(2,5)|\ t\in\mathbb{R}\}$ *com o eixo* x *e com o eixo* y*.*

Solução: *A interseção com o eixo* x *ocorrerá quando* $y=0$*. Como* $y=-3+5t$*, queremos que* $y=0=-3+5t$*. Logo interseção ocorrerá quando* $t=3/5$*. Logo* $x=-2+2(3/5)=-2/5$ *e concluímos que a interseção é no ponto* $(-2/5,0)$*. A interseção com o eixo* y *será quando* $x=0$*. Como* $x=-2+2t$*, queremos que* $x=0=-2+2t$ *e portanto* $t=1$*. Logo* $y=-3+5(1)=2$ *e concluímos que a interseção é no ponto* $(0,2)$*.* ■

1.2.2 Retas e Planos no $\mathbb{R}^3$

Equação Cartesiana do Plano em $\mathbb{R}^3$

Definição 1.9 (eq. cartesiana do plano em $\mathbb{R}^3$) *Dados* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *com* $a\neq 0$ *ou* $b\neq 0$ *ou* $c\neq 0$*, chamamos de* ***equação cartesiana do plano*** *a equação* $ax+by+cz=d$*, que representa o conjunto (o plano):*

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ ax+by+cz=d\right\}.$$

Exemplo 1.16 *Determine a interseção do plano* $2x-y+3z=2$ *com os eixos* x*,* y *e* z*.*

Solução: *O eixo* x *corresponde aos pontos* $(x,0,0)$*. Assim tomando* $y=z=0$ *obtemos que* $2x=2$ *e* $x=1$*. Logo a interseção com o eixo* x *é* $(1,0,0)$*. De forma análoga (faça) obtemos que a interseção com o eixo* y *é* $(0,-2,0)$ *e com o eixo* z *é* $(0,0,2/3)$*.* ■

Exemplo 1.17 *Determine a equação cartesiana do plano que passa por* $(1,0,2)$*,* $(-1,0,2)$ *e* $(3,2,1)$*.*

Solução: *Temos que resolver o sistema* $\begin{cases} 1a+0b+2c &= d, \\ -1a+0b+2c &= d, \\ 3a+2b+c &= d. \end{cases}$ *Somando as 2 primeiras equações obtemos que* $c=d/2$*. Da primeira obtemos que* $a=d-2c=d-d=0$*. Da terceira obtemos que* $b=(d-3a-c)/2=(d-3(0)-d/2)/2=1/4d$*. Tomando* $d=4$ *obtemos que* $a=0,b=1,c=2$*. Logo a equação do plano é* $y+2z=4$*. Tomando* $d=2$ *obtemos* $y/2+z=2$*, etc. (equação NÃO é única).* ■

Parametrização de Retas em $\mathbb{R}^3$

Parametrização de retas em $\mathbb{R}^3$ são iguais as de reta em $\mathbb{R}^2$ e utilizaremos sem maiores comentários.

Exemplo 1.18 *Determine a parametrização da reta que passa por* $(1,2,1)$ *e* $(3,-2,-1)$.
Solução: *O vetor paralelo à reta é* $\mathbf{v} = (1,2,1) - (3,-2,-1) = (-2,4,2)$ *(pode ser* $\mathbf{v} = (3,-2,-1) - (1,2,1) = (2,-4,-2)$*). Tomando* $\mathbf{w} = (1,2,1)$ *(pode ser também* $\mathbf{w} = (3,-2,1)$*)* $r = \{(1,2,1) + t(-2,4,2) |\ t \in \mathbb{R}\}$. *Outras opções:* $(3,-2,1) + t(-2,4,2)$, $(1,2,1) + t(2,-4,-2)$, $(3,-2,1) + t(2,-4,-2)$. ■

Exemplo 1.19 *Determine se o ponto* $(-2,1,-1)$ *pertence à reta* $(1,2,1) + t(3,1,1)$.
Solução: *Devemos ter* $-2 = 1 + 3t$, $1 = 2 + t$, $-1 = 1 + t$. *Da 1a equação,* $t = -1$, *que satisfaz a segunda mas* ***não*** *satisfaz a terceira. Assim o ponto não pertence à reta.* ■

Exemplo 1.20 *Determine o(s) ponto(s) de interseção de cada par de conjuntos abaixo, caso exista:*

(a) dos planos $4x - 2y + 3z = 2$ *e* $x - z = 1$;
(b) de $\{(2,3,0) + t(1,2,3) |\ t \in \mathbb{R}\}$ *e* $x - 2y + z = 2$;
(c) de $\{(2,3,0) + t(1,2,3) |\ t \in \mathbb{R}\}$ *e* $-x + 2y - z = 8$;

Solução: *(a) Resolvendo o sistema* $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$ *obtemos, colocando* $z = t$: $x = 1 + t$, $y = 1 + 7/2t$. *Assim a interseção destes 2 planos é a reta* $\{(1,1,0) + t(1,7/2,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$

(b) Como $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$ *e* $z = 3t$, $(2 + t) - 2(3 + 2t) + 3t = 2$. *Assim* $-8 = 2!$. *Como é sem solução concluímos que a reta é paralela ao plano (interseção vazia).*

(c) Fazendo contas similares ao (b) concluímos que a reta pertence ao plano pois é verdade para todo $t \in \mathbb{R}$. *Assim a interseção é a própria reta:* $\{(2,3,0) + t(1,2,3) |\ t \in \mathbb{R}\}$. ■

Parametrização de Planos em $\mathbb{R}^3$

Pela regra do triângulo ou paralelogramo (ver Figura 1.3 da p.4), dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos e não paralelos (Definição 1.5 da p.2), a equação $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, com $s, t \in \mathbb{R}$ é um plano passando pela origem. Este plano contém o paralelogramo formado pelos pontos $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Dizemos que o plano é **gerado** pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Somando um vetor $\mathbf{w}$ a cada elemento deste conjunto transladamos este plano. Na Figura 1.7 mostramos o plano $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ que passa pela origem e sua translação $\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

Definição 1.10 (parametrização do plano) *Dados* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *não nulos e não paralelos e* $\mathbf{w}$ *chamamos* $\Pi = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} |\ s, t \in \mathbb{R}\}$ *(ver Figura 1.7) de* ***parametrização do plano*** *paralelo ao gerado pelos vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *passando por* $\mathbf{w}$. *Dizemos que* t *e* s *são* ***parâmetros***.

Exemplo 1.21 *Considere o plano* $\Pi = \{(2,3,0) + s(-1,0,-1) + t(0,2,3) |\ s, t \in \mathbb{R}\}$. *Determine se* $(1,2,2) \in \Pi$.

Solução: *Temos que resolver o sistema* $\begin{cases} 2 - s + 0t = 1 \\ 3 + 0s + 2t = 2 \\ 0 - s + 3t = 2 \end{cases}$. *Das 2 primeiras equações obtemos que* $t = -1$ *e* $s = 1$. *Mas isto não satisfaz a terceira. Logo o ponto* ***não*** *pertence ao plano.* ■

Observação 1.11 *Se o plano* Π *passa pelos pontos* $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, *e* $\mathbf{p}_3$, *definindo* $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ *e* $\mathbf{v} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$, *o plano gerado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é paralelo à* Π. *Faça uma figura se convencendo disso. Assim sua parametrização é* $\mathbf{p}_1 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

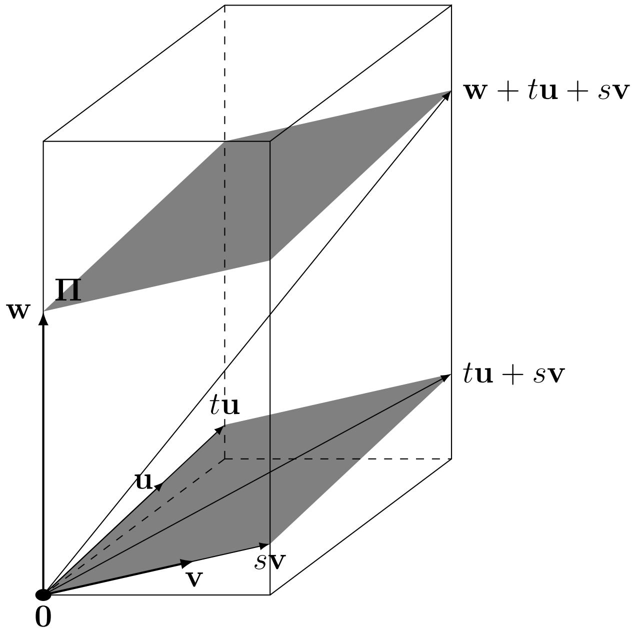


Figura 1.7: Plano $\Pi = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v};\ s, t \in \mathbb{R}\}$

Exemplo 1.22 *Determine a parametrização do plano que passa por* $(0,1,0)$*,* $(1,1,1)$*, e* $(1,0,2)$*.*
Solução: *Fixamos* $\mathbf{w} = (0,1,0)$ *o vetor translação e calculamos dois vetores paralelos ao plano:* $\mathbf{u} = (1,1,1) - (0,1,0) = (1,0,1)$ *e* $\mathbf{v} = (1,0,2) - (0,1,0) = (1,-1,2)$*. Assim o plano é* $(0,1,0) + t(1,0,1) + s(1,-1,2)$*.*

Podemos fixar $\mathbf{w} = (1,1,1)$ *e calcular os vetores paralelos ao plano* $\mathbf{u} = (0,1,0) - (1,1,1) = (-1,0,-1)$ *e* $\mathbf{v} = (1,0,2) - (1,1,1) = (0,-1,1)$*. Assim outra parametrização para o plano é* $(1,1,1) + t(-1,0,-1) + s(0,-1,1)$*.* ■

Exemplo 1.23 *Considere o plano* $\Pi = \{(2,3,0) + s(-1,0,1) + t(0,2,0) |\ s, t \in \mathbb{R}\}$*. Determine o(s) ponto(s) de interseção de* Π *com cada um dos conjuntos abaixo, caso exista:*
(a) reta $\{(-1,0,1) + t(0,1,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.* *(b) reta* $\{t(-1,2,1) |\ t \in \mathbb{R}\}$*.*
(c) plano $x - y = 2$*.* *(d) plano* $\{(1,-2,0) + s(1,1,0) + t(0,1,0) |\ s, t \in \mathbb{R}\}$*;*
(e) com o eixo z*.*
Solução: *(a) Queremos saber se existem* $s, t, u \in \mathbb{R}$ *(note que trocamos o parâmetro da reta) tais que* $(2,3,0) + s(-1,0,1) + t(0,2,0) = (-1,0,1) + u(0,1,1)$*. Precisamos resolver o sistema (3 equações, 3 variáveis):* $\begin{cases} 2 - s + 0t = -1 \\ 3 + 0s + 2t = u \\ 0 + s + 0t = 1 + u \end{cases}$*. Da primeira equação,* $s = 3$*. Da terceira, como* $s = 1 + u$*,* $u = 2$*. Da segunda, como* $3 + 2t = u$*,* $t = -1/2$*. Assim o ponto de interseção é* $(-1,0,1) + u(0,1,1) = (-1,0,1) + 2(0,1,1) = (-1,2,3)$*. Verifique que obtemos o mesmo ponto substituindo* $s = 3$ *e* $t = -1/2$ *em* $(2,3,0) + s(-1,0,1) + t(0,2,0)$*.*

(b) Queremos saber se existem $s, t, u \in \mathbb{R}$ *(note que trocamos o parâmetro da reta) tais que* $(2,3,0) + s(-1,0,1) + t(0,2,0) = u(-1,2,1)$*. Precisamos resolver o sistema (3 equações, 3 variáveis):* $\begin{cases} 2 - s + 0t = -u \\ 3 + 0s + 2t = 2u \\ 0 + s + 0t = u \end{cases}$*. Da primeira e terceira:* $u = s - 2 = s$*! Logo* $-2 = 0$*! Assim o sistema é sem solução a concluímos que a reta é paralela ao plano.*

(c) Como $x = 2 - s$ *e* $y = 3 + 2t$*,* $x - y = 2 = -1 - s - 2t = 0$*. Assim,* $s = -3 - 2t$*. Substituindo na equação do plano obtemos* $(2,3,0) + (-3 - 2t)(-1,0,1) + t(0,2,0)$*. Logo*

a interseção é a reta $(5,3,-3)+t(2,2,-2)$.

(d) Queremos saber se existem $s,t,u,v\in\mathbb{R}$ *(note que trocamos os parâmetros do segundo plano) tais que* $(2,3,0)+s(-1,0,1)+t(0,2,0)=(1,-2,0)+u(1,1,0)+v(0,1,0)$. *Precisamos resolver o sistema (3 equações, 4 variáveis):* $\begin{cases} 2-s+0t=1+u+0v \\ 3+0s+2t=-2+u+v \\ 0+s+0t=0+0u+0v \end{cases}$. *Da última equação,* $s=0$. *Da primeira,* $2-s=1+u$ *e portanto* $u=1$. *Da segunda,* $3+2t=-2+u+v=-2+1+v$. *Logo* $v=2t+4$. *Logo a solução é a reta (*$u=1, v=2t+4$*)* $(1,-2,0)+1(1,1,0)+(2t+4)(0,1,0)$. *Simplificando,* $(2,3,0)+t(0,2,0)$.

(e) O eixo z *é caracterizado pelos pontos* $(0,0,z)$. *Assim queremos determinar* $s,t\in\mathbb{R}$ *tais que* $x=2-s=0$ *e* $y=3+2t=0$. *Concluímos que* $s=2$ *e* $t=-3/2$. *Logo o ponto é* $(2,3,0)+2(-1,0,1)+-3/2(0,2,0)=(0,0,2)$. ■

Equação Cartesiana do plano → Parametrização em $\mathbb{R}^3$

Para passar de equação cartesiana para parametrização de plano em $\mathbb{R}^3$: Coloque duas das variáveis como os dois parâmetros e determine a terceira variável em função dos parâmetros.

Exemplo 1.24 *Determine a parametrização do plano:*

(a) $2x-3y+10z=16$; *(b)* $3y+2z=6$.

Solução: *(a) Coloque* $y=s$ *e* $z=t$. *Então* $x=8+3/2y-5z=8+3/2s-5t$. *Logo o plano é* $(x,y,z)=(8+3/2s-5t,\ s,\ t)=(8,0,0)+s(3/2,1,0)+t(-5,0,1)$.

(b) Como x *não aparece na equação, colocamos* $x=s$ *(um dos parâmetros). Colocando* $y=t$ *obtemos que* $z=3-3/2y=3-3/2t$. *Logo o plano é* $(x,y,z)=(s,\ t,\ 3-3/2t)=(0,0,3)+s(1,0,0)+t(0,1,-3/2)$. ■

Parametrização do plano → Equação cartesiana em $\mathbb{R}^3$

Para passar de parametrização para equação cartesiana de plano em $\mathbb{R}^3$: Determine valor dos dois parâmetros em função de duas variáveis (resolvendo sistema linear com duas das equações) e substitua na outra equação.

Observação 1.12 *A conversão parametrização* $\longleftrightarrow$ *cartesiana envolve resolver sistema linear. A generalização e sistematização da resolução de sistemas lineares para um número maior de equações e variáveis é feita pelo chamado* **escalonamento***, apresentado no Capítulo Sistema Linear (p.27).*

Exemplo 1.25 *Determine a equação cartesiana do plano:*

$\{(2,1,0)+s(-1,1,-1)+t(1,-2,3)|\ s,t\in\mathbb{R}\}$.

Solução: *Como* $x=2-s+t$ *e* $y=1+s-2t$*, obtemos resolvendo o sistema (obtendo* s,t *em função de* x,y*) que* $t=-y-x+3$ *e* $s=-y-2x+5$. *Como* $z=-s+3t$, $z=-(-y-2x+5)+3(-y-x+3)=-2y-x+4$. *Assim a equação cartesiana é* $x+2y+z=4$. ■

Observação 1.13 (Software Algébrico) *Com auxílio do Software* `Maxima` *(que pode ser obtido livremente na Internet) podemos resolver o sistema acima com o comando* `linsolve([x=2-s+t,y=1+s-2*t],[t,s]);`.

Equações Cartesianas (sistemas) de Reta em $\mathbb{R}^3$

Como determinar com equações cartesianas uma reta em $\mathbb{R}^3$? Uma equação cartesiana $ax + by+cz = d$ determina um plano. Assim podemos determinar uma reta em $\mathbb{R}^3$ pela **interseção** de dois planos não-paralelos, ou seja, por um sistema com duas equações que tenha como solução uma reta.

Equações Cartesianas (sistema) da reta → Parametrização em $\mathbb{R}^3$
Para passar de equações cartesianas para parametrização de reta em $\mathbb{R}^3$: Coloque uma das variáveis como o parâmetro e determine as outras variáveis em função do parâmetro.

Exemplo 1.26 *Determine parametrização para as retas*
(a) $\left\{\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 2 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right.$; *(b)* $\left\{\begin{aligned} x - z &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}\right.$;
Determine se cada dos pontos abaixo pertence à reta do item (a):
(c) $(1, 2, 4)$; *(d)* $(1, -1, -2)$.
Solução: *(a) Fixe* $z = t$ *e determine* $y = 1+z = 1+t$ *e* $x = (2+2y-z)/2 = 1+y-z/2 = 1 + 1 + t - t/2 = 2 + t/2$. *Logo é a reta* $(2, 1, 0) + t(1/2, 1, 1)$.

(b) Note que y *não aparece no sistema e pode assumir qualquer valor. Como* $x = 2$, $z = x - 1 = 1$. *Assim* $y = t$. *Logo a reta é* $(2, t, 1) = (2, 0, 1) + t(0, 1, 0)$.

(c) O ponto satisfaz a primeira equação mas não satisfaz a segunda. Logo não pertence à reta.

(d) Satisfaz as ***duas*** *equações; logo pertence à reta.* ■

Observação 1.14 *No exemplo anterior item (a) podemos colocar* $y = s$ *e resolver (tente!). A resposta será um pouco diferente da obtida acima.*
Se colocarmos $z = t$ *no exemplo anterior item (b) teremos um problema (tente fazer isso!).* *Veja caso similar na Observação 1.10 da p.7.*

Parametrização da reta → Equações cartesianas (sistema) em $\mathbb{R}^3$
Para passar de parametrização para equações cartesianas de reta em $\mathbb{R}^3$: Determine o parâmetro em função de uma das variáveis e substitua nas outras equações.

Exemplo 1.27 *Determine equações cartesianas para a reta:* $(1, 3, 1) + t(2, -1, 1)$.
Solução: *Como* $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$ *e* $z = 1 + t$, *temos que* $t = 3 - y$. *Assim obtemos duas equações cartesianas* $x = 1 + 2(3 - y)$ *e* $z = 1 + (3 - y)$. *Logo* $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ y + z &= 4 \end{aligned}\right.$. ■

Exemplo 1.28 *Determine a interseção da reta* $\left\{\begin{aligned} x - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right.$ *com o plano* $\{(1, 2, 2) + t(1, 0, -1) + s(1, 0, 0)|\ t, s \in \mathbb{R}\}$.
Solução: *Da parametrização do plano temos que* $x = 1+t+s$, $y = 2$, $z = 2-t$. *Substituindo obtemos o sistema (em* s, t*):* $\left\{\begin{aligned} 1 + t + s - 2(2 - t) &= 1 \\ 1 + t + s + 2 + 2 - t &= 0 \end{aligned}\right.$, *ou seja,* $\left\{\begin{aligned} 3t + s &= 4 \\ s &= -5 \end{aligned}\right.$. *Assim* $s = -5, t = 3$. *Assim a interseção é no ponto* $(1, 2, 2) + 3(1, 0, -1) + (-5)(1, 0, 0) = (-1, 2, -1)$. ■

1.3 Combinações Lineares e Espaços Gerados

Generalizamos planos e retas para $\mathbb{R}^n$ em equações cartesianas e parametrização. Para isto precisamos antes definir combinações lineares, espaços gerados, independência linear e dimensão.

1.3.1 Definições

Vamos introduzir o conceito de **combinações lineares** motivando-o através da conexão entre resolução de sistemas lineares e vetores. Faremos isto através de exemplos. Remetemos o leitor para o Capítulo Sistema Linear (p.27) para a teoria completa.

Considere o sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 5y = 4 \end{cases}$. O sistema pode ser escrito vetorialmente como $(x - 2y, -3x + 5y) = (1, 4)$. Assim $(x, -3x) + (-2y, 5y) = (1, 4)$. Colocando x e y em evidência, obtemos que $x(1, -3) + y(-2, 5) = (1, 4)$. Definindo $\mathbf{v}_1 = (1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 5)$ e $\mathbf{b} = (1, 4)$, queremos determinar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$. Logo resolver o sistema acima equivale a perguntar se o vetor $\mathbf{b}$ pode ser escrito como a soma de múltiplos dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Dizemos que queremos determinar se $\mathbf{b}$ pode ser escrito como uma **combinação linear** (veja Definição 1.11) de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

O sistema sem solução (porque?) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ pode ser interpretado como o problema de determinar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x(1, 1) + y(-2, -2) = (1, 4)$. Como os vetores $(1, 1)$ e $(-2, -2)$ são múltiplos um do outro, somas de múltiplos deles resultarão em múltiplos. Como $(1, 4)$ NÃO é múltiplo de $(1, 1)$ (porque?), o problema não tem solução.

Um vetor ser múltiplo de outro é generalizado pela definição abaixo.

Definição 1.11 (combinação linear) *Dizemos que $\mathbf{v}$ é **combinação linear** (CL) de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i.$$

Da definição segue de forma imediata que se $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\mathbf{v}_1$, então $\mathbf{v}$ é combinação linear (CL) de $\mathbf{v}_1$. Assim dois vetores numa mesma reta passando pela origem serão múltiplos entre si e um será combinação linear do outro.

Vimos que a combinação linear de dois vetores não paralelos gera um plano (Figura 1.7 da p.10). Assim $\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ significa que $\mathbf{w}$ pertence a este plano se, e somente se, $\mathbf{w}$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Assim se o vetor $\mathbf{w}$ não pertence a este plano ele não é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Exemplo 1.29 *Determinar a solução do sistema* $\begin{cases} x + y - 2z + w = 1 \\ x - y + w = -2 \\ z + w = 1 \end{cases}$ *equivale a um problema de combinações lineares. Explique.*

Solução: *Resolver este sistema equivale a saber se existem $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tais que $x(1, 1, 0) + y(1, -1, 0) + z(-2, 0, 1) + w(1, 1, 1) = (1, -2, 1)$, isto é queremos saber se $(1, -2, 1)$ é **combinação linear** de $(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-2, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$.* ∎

Exemplo 1.30 *Considere $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que qualquer vetor no plano $z = 0$ será combinação de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.*

Solução: *De fato* $(a, b, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)$. *Ou seja, por exemplo, o vetor* $\mathbf{w} = (3, -2, 0)$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$. *O significado geométrico é que* $\mathbf{w}$ *está no plano passando pela origem determinado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$. ■

Exemplo 1.31 *O mesmo vetor é combinação linear de uma infinidade de vetores distintos. Por exemplo* $(3, 3) = 3(1, 1) + 0(-2, -2) = 1(1, 1) - 2(-2, -2)$.
Por outro lado alguns vetores não podem ser obtidos como combinação linear de certos vetores. Por exemplo o vetor $(3, 4)$ *não é combinação linear de* $(1, 1)$ *e* $(2, 2)$ *pois* $(3, 4) \neq \alpha(1, 1) + \beta(2, 2)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *De fato, igualando componente a componente, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 4 \end{cases}$$

que é claramente (como $\alpha + 2\beta$ *pode ser* 3 *e* 4 *ao mesmo tempo?) sem solução.*

Exemplo 1.32 *Determine se:*
(a) $\mathbf{u} = (2, 3, 4)$ *é combinação linear de* $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ *e* $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.
(b) $\mathbf{u} = (1, 3, 4)$ *é combinação linear de* $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ *e* $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.

Solução: *(a) Precisamos determinar* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $(2, 3, 4) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1)$. *Para isto precisamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 2 \\ 0 &= 3 \\ \beta &= 4 \end{cases}.$$

Como o sistema é claramente (como podemos ter $0 = 3$*?) sem solução, concluímos que* $\mathbf{u}$ *não é combinação linear de* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.
(b) Precisamos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $(1, 3, 4) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1)$. *Para isto precisamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ -\alpha &= 3 \\ \beta &= 4 \end{cases}.$$

O sistema possui solução única com $\alpha = -3$ *e* $\beta = 4$. *Portanto,* $\mathbf{u} = -3\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$. ■

Observação 1.15 (Combinações Lineares e Sistemas) *Os exemplos anteriores mostram que são* ***problemas equivalentes****: (a) determinar se um vetor é combinação linear de outros vetores (ou não); (b) resolver um sistema linear.*

Definição 1.12 (espaço gerado) *O* ***espaço gerado*** *pelo conjunto de vetores* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, *denotado por* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ *ou ainda (em inglês e em diversos livros) por* $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, *é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. *Portanto,*

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} t_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Definição 1.13 (conjunto gerador) *O* ***conjunto ordenado***[1] $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ***gera*** *(é* ***conjunto gerador*** *de)* W *se* $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$.

Exemplo 1.33 *O espaço gerado por* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *são todos os elementos de* $\mathbb{R}^2$ *pois dado* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0)+b(0,1)$. *Escrevemos que* $\langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$. *De forma análoga* $\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.34 *O espaço gerado por* $\{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ *é igual ao gerado por* $\{(1,1,1)\}$, *a reta passando pela origem com direção* $(1,1,1)$. *Neste caso dizemos que o vetor* $(-1,-1,-1)$ *é* ***redundante*** *(não acrescenta nada) ao conjunto gerador* $\{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$. *Utilizando a notação temos que* $\langle (1,1,1),(-1,-1,-1) \rangle = \langle (1,1,1) \rangle = \langle (-1,-1,-1) \rangle$.

Exemplo 1.35 *Mostre que são iguais ao plano* $x = 0$ *em* $\mathbb{R}^3$*:*
(a) $\langle (0,0,1),(0,1,0) \rangle$; *(b)* $\langle (0,1,1),(0,1,0) \rangle$.
Solução: *Um ponto qualquer deste plano é da forma* $(0,a,b)$.
(a) É verdade pois $(0,a,b) = a(0,1,0) + b(0,0,1)$.
(b) É verdade pois $(0,a,b) = a(0,1,1) + (b-a)(0,0,1)$. ∎

Exemplo 1.36 *Considere os vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$. *Suponha que* $\mathbf{v} = 2\mathbf{w} - 3\mathbf{u}$. *Prove que* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
Solução: *É claro que se* $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, *então* $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *(porque?).*
Mas se $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, $\mathbf{b} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}$. *Como* $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}-3\mathbf{u}$, $\mathbf{b} = a\mathbf{u}+b(2\mathbf{w}-3\mathbf{u})+c\mathbf{w} = (a-3b)\mathbf{u} + (2b+c)\mathbf{w}$, *ou seja,* $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$. ∎

Vamos motivar o conceito de (in)dependência linear com 2 exemplos geométricos.

Exemplo 1.37 *Ilustramos na Figura 1.8 três casos típicos de conjuntos gerados por* $1, 2$ *e* 3 *vetores, que geram, respectivamente, uma reta, um plano e um espaço tridimensional:*

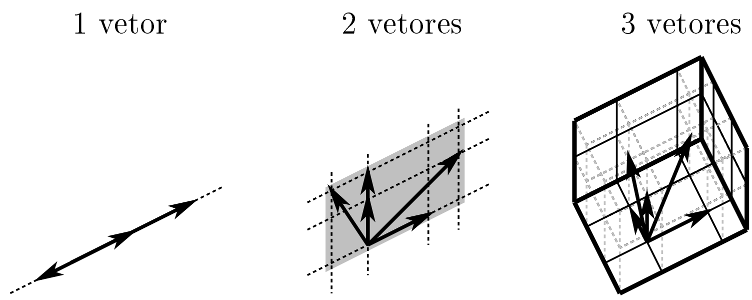


Figura 1.8: Vetores gerando reta, plano e espaço.

Exemplo 1.38 *Pode ocorrer, no entanto, de um dos vetores ser "redundante" (desnecessário), e o espaço gerado por* 2 *vetores ser uma reta ou por* 3 *vetores ser um plano, como ilustramos na Figura 1.9.*

Lema 1.14 *Dados vetores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, *com* $p > 1$, *existe um vetor que é combinação linear dos outros se, e somente se, existem* $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ *com pelo menos um deles não-nulo e* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

[1]Veja nota na p.73.

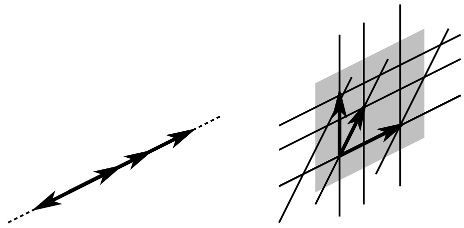


Figura 1.9: 2 vetores gerando reta e 3 vetores gerando plano.

Prova: Vamos provar para $p = 3$ para facilitar notação. Se, digamos, $\mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_3$, então $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3$.

Se existem $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ com, digamos, $t_3 \neq 0$, $\mathbf{0} = t_1\mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3$ e portanto $\mathbf{v}_3 = -t_1/t_3\mathbf{v}_2 - t_2/t_3\mathbf{v}_3$. ■

Este lema mostra que $\mathbf{0}$ pode ser expresso como CL não-trivial dos $\mathbf{v}_i$'s. se, e somente se, um dos vetores é combinação linear dos outros, isto é, se e somente se um dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ é "redundante" (pode ser eliminado da lista).

Definição 1.15 (linearmente dependente/independente) *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *são ditos* ***linearmente dependentes*** *(abreviamos por LD) se existem* $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ *com pelo menos um deles não-nulo e*

$$\sum_{i=1}^{p} t_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Pelo Lema 1.14, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *com* $p > 1$ *será LD se, e só se, um dos vetores é combinação linear dos demais.*

Caso contrário, dizemos que o conjunto é ***linearmente independente*** *(abreviamos por LI). Mais explicitamente, se* $\sum_{i=1}^{p} t_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$*, então* $t_1 = t_2 = \cdots = t_p = 0$.

Assim (exemplo anterior) se, por exemplo, $\mathbf{v} = 2\mathbf{w} - 3\mathbf{u}$, então como $\mathbf{0} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é LD.

Exemplo 1.39 *Determine condições para que seja LI:*

(a) o conjunto unitário $\{\mathbf{u}\}$; *(b) o conjunto* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$

Solução: *(a) Para ser LD devemos ter* $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *com* $t \neq 0$. *Isto é possível se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. *Assim basta que* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

(b) Para ser LD devemos ter $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *com* t *ou* s *diferentes de zero. Supondo* $t \neq 0$ *(caso contrário o raciocínio é análogo),* $\mathbf{v} = -(s/t)\mathbf{u}$, *ou seja,* $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\mathbf{u}$. *Assim basta que não sejam múltiplos entre si para que o conjunto seja LI.* ■

Se um vetor $\mathbf{v} \in \beta$ é combinação linear dos demais vetores de β, então o espaço gerado por β e por $\beta - \{\mathbf{v}\}$ (conjunto β sem o vetor $\mathbf{v}$) é o mesmo. Ou seja, o vetor $\mathbf{v}$ é **redundante** em β pois não acrescenta nada ao espaço gerado por β. Pelo Lema 1.14 o conjunto β é **LD**.

Exemplo 1.40 *Mostre que o conjunto* $\{(1,-2,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$ *é LD.*
Solução: *O conjunto é linearmente dependente pois* $(1,-2,1) = 3(1,0,1) - 2(1,1,1)$*. Assim* $(1,-2,1)$ *é redundante. Desta forma* $\langle(1,-2,1),(1,0,1),(1,1,1)\rangle = \langle(1,0,1),(1,1,1)\rangle$*. Neste mesmo conjunto, o vetor* $(1,1,1)$ *é redundante pois* $(1,1,1) = -1/2(1,-2,1) + 3/2(1,0,1)$*. Portanto,* $\langle(1,-2,1),(1,0,1),(1,1,1)\rangle = \langle(1,-2,1),(1,0,1)\rangle$*.* ■

Exemplo 1.41 *Considere a caixa retangular e os vetores* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$*, representados na Figura 1.10. Determine se são LIs ou LDs os conjuntos:*
(a) $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$*; (b)* $\{\mathbf{w},\mathbf{z}\}$*; (c)* $\{\mathbf{v},\mathbf{y},\mathbf{z}\}$*; (d)* $\{\mathbf{v},\mathbf{z}\}$*; (e)* $\{\mathbf{u},\mathbf{y}\}$*;*
(f) $\{\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\}$*; (g)* $\{\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$*; (h)* $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}\}$*; (i)* $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}\}$*.*
Solução:
São LIs os conjuntos (a) $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$*, (b)* $\{\mathbf{w},\mathbf{z}\}$*, (c)* $\{\mathbf{v},\mathbf{y},\mathbf{z}\}$*, (d)* $\{\mathbf{v},\mathbf{z}\}$*.*
São LDs os conjuntos (e) $\{\mathbf{u},\mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{u} = -2\mathbf{y}$*, (f)* $\{\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{x}+\mathbf{v} = 2\mathbf{y}$*, (g)* $\{\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ *pois* $\mathbf{w}+2\mathbf{z} = \mathbf{v}$*, (h)* $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}\}$ *pois* $\mathbf{u} = -2\mathbf{y}$*, (i)* $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}\}$ *pois* $\mathbf{v}+\mathbf{u}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$*.* ■

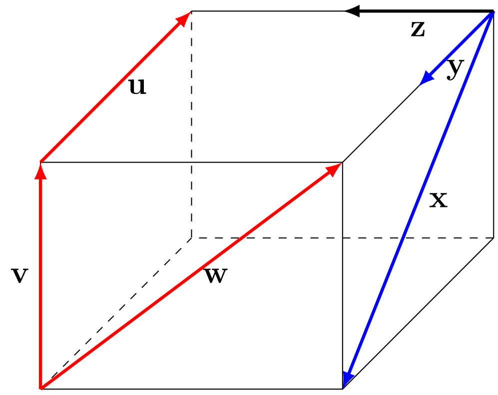


Figura 1.10: Vetores em um Cubo

Definição 1.16 (dimensão) *Dizemos que o espaço gerado* $H = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p\rangle$ *possui* ***dimensão*** p *se o conjunto* $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ *é LI.*

Observação 1.16 *Uma questão sem resposta aqui é se isto define, de fato, um único número. Ou seja, será que sempre que* $H = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p\rangle = \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_q\rangle$ *com* $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ *e* $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_q\}$ *LIs, temos que* $p = q$*? Veja prova que sim no Corolário 3.23 da p.84.*

Para se determinar a dimensão do espaço gerado deve-se eliminar os vetores dependentes (redundantes) do conjunto de vetores.

Exemplo 1.42 *Determine a dimensão de:*
(a) $\langle(1/2,2,-1),(-1,-4,2)\rangle$*; (b)* $\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$*;*
(c) $\langle(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\rangle$*; (d)* $\langle(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$*.*
Solução: *(a) O espaço gerado é a reta passando pela origem paralela ao vetor* $(1/2,2,-1)$ *(ou* $(-1,-4,2)$*), que é a mesma reta). Neste caso o espaço gerado possui dimensão* 1*. Portanto,* $\langle(1/2,2,-1),(-1,-4,2)\rangle = \langle(1/2,2,-1)\rangle = \langle(-1,-4,2)\rangle$ *.*
(b) O espaço gerado é igual a todo o $\mathbb{R}^3$ *pois dado* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*,* $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$*. A dimensão é* 3*.*

(c) Como, $(1,1,1) = (1,0,1)+(0,1,0)$, $\langle(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\rangle = \langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$. *Assim a dimensão é* 2.

(d) Pode-se verificar que o conjunto é LI pois fazendo uma combinação linear deles obtemos $(0,a,b,c) = (0,0,0,0)$. *A única forma disto ocorrer é se* $a = b = c = 0$. *Logo a dimensão é* 3*, igual a um subespaço de dimensão* 3 *do* $\mathbb{R}^4$ *perpendicular ao eixo* x. ■

Exemplo 1.43 *Considere três vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *no* $\mathbb{R}^3$. *Se eles forem LIs, eles gerarão um subespaço de dimensão* 3 *que será necessariamente igual a todo o* $\mathbb{R}^3$. *Se um for combinação linear (LDs) dos outros, digamos que* $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$*, ele será redundante; desta forma* $\langle\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ *será igual a* $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$. *Agora, conforme análise anterior, o espaço gerado será reduzido a um plano, reta ou ponto.*

Observação 1.17 (localizando pontos) *Pontos numa reta fixa em* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *podem ser localizados por um único parâmetro. Isto também é verdade para curvas. Assim localizamos um ponto em uma certa estrada (que é uma curva em* $\mathbb{R}^3$*) pelo seu quilômetro. Já pontos num plano, ou de forma mais geral numa superfície, são localizados por dois parâmetros. Na superfície da terra por latitude e longitude por exemplo. O número de parâmetros necessários será chamado de* ***dimensão****. Assim dizemos que uma reta ou curva possui dimensão 1 e um plano ou superfície dimensão 2.*

O **espaço gerado** é, geometricamente, reta, plano e generalizações passando pela origem. Mais precisamente, se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}$ não é múltiplo de $\mathbf{u}$, $\langle\mathbf{u}\rangle$ é uma reta passando pela origem e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ é um plano passando pela origem. O **espaço gerado transladado** é, geometricamente, reta, plano e generalizações passando pelo ponto de translação. Assim dado um vetor $\mathbf{w}$ qualquer, $\mathbf{w} + \langle\mathbf{u}\rangle$ é uma reta e $\mathbf{w} + \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ é um plano, ambos passando por $\mathbf{w}$. Vimos isto em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ na Seção 1.2 da p.5. Vamos generalizar agora.

1.3.2 Espaço Gerado por 1 Vetor e Retas em $\mathbb{R}^n$

Vimos (na p.6) que dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e um vetor $\mathbf{w}$ qualquer a equação $\mathbf{w} + t\mathbf{u}$ é uma reta. Utilizando a notação de espaço gerado, a **parametrização da reta** em $\mathbb{R}^n$ é dada por $r = \mathbf{w} + \langle\mathbf{u}\rangle$, onde $\mathbf{u}$ é uma direção paralela à reta e $\mathbf{w}$ o vetor translação.

Vimos (na p.12) que em $\mathbb{R}^3$ precisamos de um sistema com pelo menos 2 equações cartesianas para determinar uma reta. O caso geral de equações cartesianas de reta em $\mathbb{R}^n$ será visto no Capítulo Sistema Linear (p.27), onde se entenderá porque retas em $\mathbb{R}^4$, por exemplo, são determinadas por um sistema com pelo menos 3 equações.

Exemplo 1.44 *Determine parametrização para a reta (em* $\mathbb{R}^4$*):*

(a) que contém o ponto $(2,3,4,5)$ *e é paralela ao vetor* $(-1,1,-1,1)$*;*

(b) que contém os pontos $(1,2,1,2)$ *e* $(3,4,3,4)$*;*

(c) $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *tais que* $\begin{cases} x - w = 2 \\ y - z = 3 \\ z - 2w = 1 \end{cases}$

Solução: *(a) A reta é* $(2,3,4,5) + t(-1,1,-1,1)$.

(b) Calculando $\mathbf{u} = (3,4,3,4) - (1,2,1,2) = (2,2,2,2)$*, paralelo à reta. Assim a reta é* $(1,2,1,2) + t(2,2,2,2)$. *Note que poderíamos ter calculado* $\mathbf{u} = (1,2,1,2) - (3,4,3,4) = (-2,-2,-2,-2)$ *e obteríamos a* ***mesma reta****, embora com representação distinta,* $(1,2,1,2) + t(-2,-2,-2,-2)$. *Utilizamos* $\mathbf{w} = (1,2,1,2)$ *mas poderíamos ter tomado* $(3,4,3,4)$. *Assim, fazendo todas as combinações, representam ainda a mesma reta,* $(3,4,3,4) + t(-2,-2,-2,-2)$ *e* $(3,4,3,4) + t(2,2,2,2)$.

(c) Tomando $w = t$, obtemos que $z = 2t + 1$, $y = z + 3 = t + 4$, $x = w + 2 = t + 2$. Assim a reta $(x, y, z, w) = (2, 4, 1, 0) + t(1, 1, 2, 1)$. ■

Exemplo 1.45 *(a) Determine se o ponto $(1,1,1,2)$ pertence à reta $(1,0,-1,0)+\langle(2,1,2,1)\rangle$.*

(b) Determine se $(1,2,1) + \langle(2,-6,4)\rangle = (0,5,-1) + \langle(-1,3,-2)\rangle$.

Solução: *(a) Queremos saber se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(1,1,1,2) = (1,0,-1,0)+t(2,1,2,1)$. Isto determina o sistema*

$$\begin{cases} 1+2t &= 1 \\ t &= 1 \\ -1+2t &= 1 \\ t &= 2 \end{cases}.$$

Como ele não possui solução ($t = 1$ e $t = 2$?), o ponto não pertence à reta.

(b) Queremos saber se para um s dado, existe t tal que $(1,2,1)+s(2,-6,4) = (0,5,-1)+t(-1,3,-2)$. Isto determina o sistema linear

$$\begin{cases} -t &= 1+2s \\ 3t &= -3-6s \\ -2t &= 2+4s \end{cases}.$$

Da primeira equação obtemos que $t = -1 - 2s$. Verifique que isto satisfaz as outras duas equações. Portanto é a mesma reta.

Uma solução mais geométrica é observar que ambas são translação da reta $\langle(-1,3,-2)\rangle$ pois $(2,-6,4) = -2(-1,3,-2)$. Além disso o ponto $(1,2,1) \in (0,5,-1) + \langle(-1,3,-2)\rangle$ (verifique isso!). ■

Exemplo 1.46 *Determine equações cartesianas para a reta (em $\mathbb{R}^4$) $(1,0,1,0)+t(2,-1,1,3)$.*

Solução: *Como $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = t$ e $w = 3t$, temos (fixe $t = z$):*

$$\begin{cases} x-2z=1 \\ y+z=0 \\ -3z+w=0 \end{cases}.$$

■

Observação 1.18 *A caracterização de reta através de parametrização independe da dimensão do espaço ambiente. Desta forma uma reta em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, etc. é sempre da forma $\mathbf{w}+t\mathbf{v}$. Por contraste, precisamos de uma equação cartesiana para caracterizar uma reta em $\mathbb{R}^2$, 2 equações em $\mathbb{R}^3$, 3 equações em $\mathbb{R}^4$, etc.*

Observação 1.19 ***A parametrização não é única.***
Dada reta $r = \{\mathbf{w} + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$ podemos substituir $\mathbf{u}$ por um múltiplo não-nulo qualquer $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v} = -6\mathbf{u}$ e obter a mesma reta $r = \{\mathbf{w} + s\mathbf{v};\ s \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, dado $\mathbf{z} \in r$ qualquer, como $\mathbf{z}-\mathbf{w}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{u}$ (faça um desenho), $r = \{\mathbf{z}+t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}\}$ (podemos substituir $\mathbf{w} \in r$ por outro vetor qualquer que pertença à reta.

1.3.3 Espaço Gerado por 2 Vetores e Planos no $\mathbb{R}^n$

Vimos (na p.10) que dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não nulos e não paralelos (Definição 1.5 da p.2), e um vetor translação $\mathbf{w}$ qualquer a equação $\mathbf{w} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ é um plano. Utilizando a notação de espaço gerado, a **parametrização do plano** em $\mathbb{R}^n$ é dada por $\Pi = \mathbf{w} + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

Vimos (na p.8) que uma equação cartesiana determina um plano em $\mathbb{R}^3$. Vamos ver através de exemplos que em $\mathbb{R}^4$ precisamos de um sistema com pelo menos 2 equações cartesianas para determinar um plano. O caso geral de planos em $\mathbb{R}^n$ será visto no Capítulo Sistema Linear (p.27) onde se entenderá porque planos em $\mathbb{R}^5$, por exemplo, são determinadas por um sistema com pelo menos 3 equações.

Exemplo 1.47 *Determine pontos do plano cuja parametrização é* $(1,1,2,0)+t(-1,2,-1,1)+s(1,1,1,1)$.
Solução: *Colocamos* $t=s=0$ *para obter o ponto* $(1,1,2,0)$. *Colocando* $t=0$, $s=1$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(1,1,1,1)=(2,2,3,1)$. *Colocando* $t=1$, $s=0$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(-1,2,-1,1)=(0,3,1,1)$. *Colocando* $t=1$, $s=-1$ *obtemos* $(1,1,2,0)+(-1,2,-1,1)-(1,1,1,1)=(-1,2,0,0)$. ■

Exemplo 1.48 *Considere* $\mathbf{u}=(1,-2,1,1,1), \mathbf{v}=(2,2,0,1,1)$. *Verifique se* $(1,2,3,4,5)+\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ *é um plano em* $\mathbb{R}^5$.
Solução: *Os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *não são múltiplos entre si. Podemos verificar isto comparando as primeiras entradas: uma teria que ser o dobro do outro. Mas as outras entradas não são o dobro entre si. Logo é um plano.* ■

Exemplo 1.49 *Determine se o ponto* $(1,1,1,1)$ *pertence ao plano* $(2,2,2,2)+\langle(1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$.
Solução: *Queremos saber se existem* $s,t\in\mathbb{R}$ *tal que* $(1,3,1,3)=(2,2,2,2)+s(1,0,1,0)+t(0,1,0,1)$. *Isto determina o sistema*

$$\begin{cases} 2+s &= 1\\ 2+t &= 3\\ 2+s &= 1\\ 2+t &= 3\end{cases}.$$

A solução é $s=-1$ *e* $t=1$. *Portanto o ponto pertence ao plano.* ■

Exemplo 1.50 *Determine parametrização para o plano (em* $\mathbb{R}^4$*):*

(a) que contém o ponto $(1,2,3,4)$ *e é simultaneamente paralelo aos vetores* $(2,3,5,7)$ *e* $(0,1,0,1)$.

(b) que contém os pontos $(2,2,2,2)$, $(3,3,3,3)$ *e* $(4,0,4,0)$.

(c) que contém os pontos $(1,-1,1,-1)$ *e* $(2,3,4,5)$ *e é paralelo ao vetor* $(2,-3,4,-5)$.

(d) formado por $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ *tais que* $\begin{cases} x+w=5\\ y-2z=2\end{cases}$.

Solução: *(a) O plano é* $(1,2,3,4)+t(2,3,5,7)+s(0,1,0,1)$.

(b) Tomando $\mathbf{w}=(2,2,2,2)$, $\mathbf{u}=(3,3,3,3)-\mathbf{w}=(1,1,1,1)$ *e* $\mathbf{v}=(4,0,4,0)-\mathbf{w}=(2,-2,2,-2)$. *Logo o plano é* $\mathbf{w}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$.

(c) Tomando $\mathbf{w}=(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{u}=(2,3,4,5)-\mathbf{w}=(1,4,3,6)$ *e* $\mathbf{v}=(2,-3,4,-5)$. *Logo o plano é* $\mathbf{w}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$.

(d) Tome $z=t$, $w=s$. *Então* $x=5-s, y=2+2t$. *Logo* $(x,y,z,w)=(5,2,0,0)+s(-1,0,0,1)+t(0,2,1,0)$. ■

1.3.4 Espaço Gerado por 3 ou Mais Vetores

Já vimos que (Exemplo 1.39 da p.16):

- $\{\mathbf{u}\}$ é LI se, e somente se, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$.
- $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ é LI se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são não nulos e não paralelos.

Assim o espaço gerado por p vetores LIs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ é uma reta se $p = 1$ e um plano se $p = 2$. Vamos generalizar para $p \geq 3$.

A combinação linear de p vetores LIs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ gera um subespaço passando pela origem. Adicionando um vetor translação $\mathbf{w}$ a este subespaço obtemos a equação $\mathbf{w} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p$, onde $t_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \ldots, p$, são p variáveis independentes. Utilizando a notação de espaço gerado, a **parametrização** é dada por $\mathbf{w} + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \rangle$.

Exemplo 1.51 *Determine parametrização para o conjunto solução* $(x, y, z, w, q) \in \mathbb{R}^5$ *do sistema:* $\begin{cases} x - y + z - w = 1 \\ y - q = 0 \end{cases}$.

Solução: *São 5 variáveis e 2 equações: podemos introduzir* $5 - 2 = 3$ *parâmetros* $r, s, t \in \mathbb{R}$. *Assim tomando* $z = r, w = s, q = t$, $x = 2 + q = 2 + t$, $y = x + z - w - 1 = 2 + t + r - s - 1 = t + r - s + 1$. *Logo a solução é* $(2, 1, 0, 0, 0) + r(0, 1, 1, 0, 0) + s(0, -1, 0, 1, 0) + t(0, 1, 0, 0, 1)$. ■

Exemplo 1.52 *Identifique se é reta, plano etc. o conjunto:*
$(2, 3, 5, 7) + \langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3) \rangle$.

Solução: *É uma reta em* $\mathbb{R}^4$ *embora seja gerado por* 3 *vetores. Isto porque* $(2, 2, 2, 2) = 2(1, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 3, 3) = 3(1, 1, 1, 1)$. *Desta forma,*
$\langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3) \rangle = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$. ■

Portanto a caracterização geométrica de $S = \mathbf{w} + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \rangle$ depende não do valor de p, mas de quantos vetores são LIs. Assim se:

- $p = 0$, S é um ponto;
- $p = 1$, S é uma reta ou ponto;
- $p = 2$, S é um plano, uma reta ou um ponto;
- $p = 3$, S é a translação de um subespaço de dimensão 3, um plano, uma reta ou um ponto;
- $p = k$, S é a translação de um subespaço de **no máximo** dimensão k.

É intuitivo que em $\mathbb{R}^2$ qualquer conjunto de 3 vetores será LD pois caso contrário geraria um subespaço de dimensão 3. Do mesmo modo em $\mathbb{R}^3$, qualquer conjunto com 4 ou mais vetores é LD pois caso contrário geraria um subespaço de dimensão maior que 4.

Por outro lado, para que um conjunto de vetores gere todo o $\mathbb{R}^2$ deve ter pelo menos 2 vetores, caso contrário gerará somente uma reta ou ponto. Para que gere todo o $\mathbb{R}^3$ deve ter pelo menos 3 vetores, caso contrário gerará somente plano, reta ou ponto.

Concluímos que em $\mathbb{R}^n$:

- um conjunto com mais de n vetores é LD;
- um conjunto com menos de n vetores não gera $\mathbb{R}^n$;
- um conjunto de n vetores gera $\mathbb{R}^n$ se, e só se, é LI.

1.4 Exercícios de Introdução à Álgebra Linear

1.4.1 Exercícios de Fixação

Fix 1.1: Determine quais dos vetores abaixo são múltiplos de (ou paralelos a) $(2, 6, -4) \in \mathbb{R}^3$:
(a) $(4, 12, 8)$; (b) $(3, 9, -6)$; (c) $(0, 0, 0)$; (d) $(-1, -3, 2)$.

Fix 1.2: Quando representamos vetores como setinhas:
(a) dois vetores iguais são necessariamente ________ (*coincidentes, paralelos*);
(b) fazendo produto por $k > 1$ obtemos vetor com ________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ____________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).
(c) fazendo produto por $k = -1$ obtemos vetor com ________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ____________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).
(d) fazendo produto por $k < -1$ obtemos vetor com ________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ____________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).
(e) fazendo produto por k, com $-1 < k < 0$, obtemos vetor com ________ (*mesmo, maior, menor*) tamanho e com ____________ (*mesmo sentido, sentido oposto*).

Fix 1.3: Determine se é ponto, reta ou plano o conjunto representado pela(s) equação(ões):
(a) $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$; (b) $x = -1$ em $\mathbb{R}$; (c) $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$;
(d) $x + y = 2$ em $\mathbb{R}^2$; (e) $x - y = -1$ em $\mathbb{R}^3$;
(f) $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^2$; (g) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$; (h) $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$;

Fix 1.4: A a interseção da reta $3y - 2x = 5$ com o
(a) eixo x é ________; (b) eixo y é ________;

Fix 1.5: A parametrização da reta
(a) $x = 3$ é ________; (b) $y = -1$ é ________.

Fix 1.6: Determine se é combinação linear de $(2, 0)$ e $(0, 2)$:
(a) $(0, 0)$; (b) $(1, 0)$; (c) $(4, 6)$.

Fix 1.7: Complete lacunas. Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ equivale a determinar se:
(a) existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x(\_\_\ ,\ \_\_) + y(\_\_\ ,\ \_\_) = (\_\_\ ,\ \_\_)$ (CL);
(b) $(\_\_\ ,\ \_\_) \in \langle(\_\_\ ,\ \_\_),\ (\_\_\ ,\ \_\_)\rangle$ (espaço gerado).

Fix 1.8: Considere a correspondência existente entre resolver um sistema linear e existência de combinação linear. Considere as opções: (1) existe pelo menos duas combinações lineares, (2) existe somente uma combinação linear, (3) não existe combinação linear. Corresponde a um sistema:
(a) sem solução:___; (b) com infinitas soluções:___; (c) com solução única:___.

Fix 1.9: Associe a cada sistema abaixo (uma letra) o problema correspondente (um número):
(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ___; (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ ___;
(c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ ___; (d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ ___.

(1) $(1, 2) \in \langle(1, 1), (2, 3)\rangle$?; (2) $(1, 2) \in \langle(1, 1), (2, 2), (3, -1)\rangle$?;
(3) $(1, 2, 3) \in \langle(1, 1, 1), (1, 2, 1)\rangle$?; (4) $(1, 2, 3) \in \langle(1, 1, 1), (2, 1, -1), (3, -1, -1)\rangle$?.

[1] Versão 23.ago.2012 11h

Fix 1.10: Determine se é ponto, reta ou plano:
(a) $\langle(1,2,0,0),(2,4,0,0)\rangle + (2,1,2,2)$; (b) $\langle(1,2,0,0),(0,1,0,0)\rangle + (0,0,0,0)$;
(c) $\langle(1,1,1,1)\rangle + (0,0,0,0)$; (d) $\langle(0,0,0,0)\rangle + (1,1,1,1)$;

Fix 1.11: Se $\mathbf{u}$ é combinação linear de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, então necessariamente $\mathbf{u}$ pertence:
(a) à reta gerada por $\mathbf{w}$? (b) ao plano gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

Fix 1.12: Seja S um conjunto com 5 vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se é verdadeiro ou falso:
(a) se $n = 3$, então S é sempre LD; (b) se $n = 4$, então S sempre gera $\mathbb{R}^4$.

Fix 1.13: O número **mínimo** de equações cartesianas para determinar um(a):
(a) reta em $\mathbb{R}^3$ é __; (b) reta em $\mathbb{R}^4$ é __; (c) plano em $\mathbb{R}^3$ é __; (d) plano em $\mathbb{R}^4$ é __.

1.4.2 Problemas

Prob 1.1: Determine, se for possível, $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{w} = (1,0,2) + k(-1,2,0)$ seja um múltiplo (isto é, seja paralelo) a
(a) $\mathbf{u} = (-1,3,1)$; (b) $\mathbf{v} = (-1,3,2)$.

Prob 1.2: Determine parametrização para as retas (em $\mathbb{R}^2$):
(a) $y - 2x = 5$; (b) $y = -1$.

Prob 1.3: Determine equações cartesianas para as retas (em $\mathbb{R}^2$):
(a) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -t \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x = 5t-1 \\ y = 2t \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x = t \\ y = -3 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$.

Prob 1.4: Determine parametrização para as retas (em $\mathbb{R}^3$):
(a) $\begin{cases} z - x = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

Prob 1.5: Determine parametrização para a reta (em $\mathbb{R}^3$):
(a) que contém os pontos $(2,\ -3,\ -1)$ e $(1,\ 2,\ 1)$;
(b) que contém o ponto $(-1,\ 2,\ -1)$ e é paralela ao vetor $(0,\ 0,\ 1)$;
(c) que pertence ao plano $x - y = z - 1$ e ao plano $3x - y + 1 = z$.

Prob 1.6: Determine equações cartesianas para as retas (em $\mathbb{R}^3$):
(a) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -t \\ z = 3t+2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = t \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x = 5t-1 \\ y = 6t+2 \\ z = -t-1 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Prob 1.7: Determine parametrização para os planos (em $\mathbb{R}^3$):
(a) $x + y - z = 2$; (b) $y - z = 0$.

Prob 1.8: Determine equações cartesianas para os planos (em $\mathbb{R}^3$):
(a) $\begin{cases} x = s+t \\ y = s-t \\ z = 4s-2t-2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = s \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x = 2s+2 \\ y = t-s \\ z = 4s-2t+1 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases}$.

Prob 1.9: Considere a reta $r = (1,2,1) + \langle(1,0,1)\rangle$, o plano $\Pi_1 = (2,0,0) + \langle(2,0,2),(1,0,0)\rangle$, o plano $\Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + z = 0\}$. Determine:
(a) $r \cap \Pi_1$; (b) $r \cap \Pi_2$; (c) $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Prob 1.10: Determine parametrização para o plano (em $\mathbb{R}^3$) que contém o(s) ponto(s):
(a) $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(-1,0,0)$.
(b) $(3,0,-1)$ e é simultaneamente paralelo aos vetores $(2,-1,1)$ e $(0,1,-1)$.
(c) $(1,3,2)$ e $(-1,2,1)$ e é paralelo ao vetor $(1,-1,-1)$.

(d) $(-3, 1, 0)$ e a reta parametrizada por $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 - t \\ z = t - 1 \end{cases}$.

Prob 1.11: Considere a reta $r = (1, 2, 0, 0) + t(0,\ 1/2,\ 1,\ -1) \subset \mathbb{R}^3$. Determine:
(a) três pontos distintos de r; (b) se $(1,\ 4,\ 4,\ -4) \in r$;
(c) se $(1,\ 4,\ 3,\ 2) \in r$; (d) se $r = (1,\ 4,\ 3,\ 2) + s(0,\ 1/2,\ 1,\ -1)$;
(e) se $r = (1,\ 4,\ -4,\ 4) + s(0,\ -2,\ -4,\ 4)$.

Prob 1.12: Considere plano $\Pi = (1, 1, 2, 0) + t(-1, 2, -1, 2) + s(1, 1, 1, 1) \subset \mathbb{R}^4$. Determine:
(a) quatro pontos distintos de Π; (b) se $(2, 5, 3, 4) \in \Pi$;
(c) se $(1, 1, 3, 3) \in \Pi$; (d) se $\Pi = (1, 1, 3, 3) + \langle(-1, 2, -1, 2), (1, 1, 1, 1)\rangle$;
(e) interseção com eixo y; (f) interseção com plano $\langle(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.

Prob 1.13: Determine uma parametrização para:
(a) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y + 3z - 2w = 4\}$; (b) $\{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 |\ z - 3u = 5\}$.
(c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x + 2z = 0, \quad y - w = 0\}$;

Prob 1.14: Determine por inspeção se é LI:
(a) $\{(1, 2, 2, 3), (2, 4, 4, 5)\}$; (b) $\{(-1, 2, 1, -3), (3, -6, -3, 9\}$;
(c) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$; (d) $\{(1, 2, 3, 4, 5), (0, 0, 0, 0, 0), (5, 4, 3, 2, 1)\}$.

Prob 1.15: Determine se:
(a) $(1, 2, 3, 5) \in \langle(1, 2, 3, 4)\rangle$; (b) $(-1, 0, 0) \in \langle(2, 1, 1), (3, 1, 1)\rangle$;
(c) $(-1, 0, 2) \in \langle(2, 1, 1), (3, 1, 1)\rangle$; (d) $\mathbb{R}^3 = \langle(0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\rangle$;
(e) $\langle(2, 1, 2)\rangle = \langle(2, -1, 2)\rangle$.

1.4.3 Extras

Ext 1.1: Seja S um conjunto com 5 vetores em $\mathbb{R}^n$. Determine se é verdadeiro ou falso:
(a) se $n = 7$, então S é sempre LI; (b) se $n = 3$, então S pode gerar o $\mathbb{R}^3$;

Ext 1.2: Determine parametrização para os conjuntos:
(a) $x = 3$ em $\mathbb{R}^2$; (b) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ em $\mathbb{R}^3$;
(c) $x - 2y = 1$ em $\mathbb{R}^3$; (d) $3x - 2z - 5 = 0$ em $\mathbb{R}^3$;

Ext 1.3: Determine se é ponto, reta ou plano:
(a) $(1, 2, 1, 2, 1) + \langle(0, 0, 0, 0, 0), (-1, 2, 1, 2, 1))\rangle$;
(b) $(1, 2, 1, 1) + \langle(1, 2, 1, 3), (1, 2, 1, 4))\rangle$;
(c) $(1, 2, 1, 1) + \langle(1, 1, 1, 1), (0, 2, 0, 2), (1, 3, 1, 3))\rangle$;
(d) $(2, 0, 2, 0) + \langle(1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)\rangle$;
(e) $(0, 0, 0, 0) + \langle(0, 0, 0, 0))\rangle$;
(f) $\mathbf{v} + \langle\mathbf{u}, -\mathbf{u}, 3\mathbf{u}\rangle$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Ext 1.4: Escreve o sistema linear (não resolva o sistema) que deve ser resolvido para determinar se $(1, 2, 1, 0)$ é combinação linear de $(-1, 2, -3, 1)$ e $(2, 2, -1, 3)$.

1.4.4 Desafios

Des 1.1: Um truque de mágica bem conhecido é a fuga de uma caixa completamente fechada. Vamos ver como isto é possível em $\mathbb{R}^4$.
No plano é impossível fugir de dentro de um quadrado sem atravessar uma das arestas. No entanto, em $\mathbb{R}^3$, podemos fugir do quadrado subindo (na direção perpendicular ao quadrado); andando paralelamente ao quadrado para fora dele; e descendo(na direção perpendicular ao

quadrado) retornando ao plano que contém o quadrado mas no lado de fora dele. Desta forma saímos de dentro do quadrado sem atravessar nenhuma das arestas.
Utilizando esta ideia, considere o cubo $C \subset \mathbb{R}^4$ definido por $C = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4;\ |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.

(a) Faça definição análoga em $\mathbb{R}^3$ do quadrado e esboce o conjunto.

(b) Descreva a parametrização de uma curva que comece em $(0, 0, 0, 0) \in C$ e termine fora de C.

Capítulo 2

Sistema Linear

Neste capítulo apresentamos:

(a) aplicações de sistemas lineares;

(b) o conjunto das matrizes e sua relação com vetores;

(c) operações elementares em matrizes e sistemas equivalentes;

(d) algoritmo da eliminação de Gauss para escalonamento de matrizes;

(e) como determinar se um sistema linear possui solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução. Caso possua solução, qual é a solução (se única) ou a parametrização do conjunto-solução (se infinitas).

(f) interpretações do produto matriz-vetor implicando em diferentes interpretações de soluções de um sistema linear. Em particular interpretação geométrica da solução de sistemas em qualquer dimensão.

2.1 Aplicações de Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em diversas aplicações na Física, Química, Engenharia e em problemas da própria Matemática. Vamos apresentar diversos exemplos que servem de motivação para este estudo. O Exemplo 2.1 não sugere necessidade de muitas (milhares de) variáveis e foi incluído somente para contrastar com os outros.

Exemplo 2.1 *Há dois tipos de moeda indistinguíveis, exceto pelo peso. As de material X pesam 10 g cada e as de material Y, 20 g cada. Se um conjunto de 100 moedas pesa 1.25 Kg, quantas são do material X?*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ 10x & + & 20y & = & 1250 \end{array} \right. .$$

Exemplo 2.2 *A combustão do propano produz dióxido de carbono e água. Encontre a, b, c e d de forma a balancear a equação da reação: $a\, C_3H_8 + b\, O_2 \longrightarrow c\, CO_2 + d\, H_2O$.*

[1]Versão 05.out.2012 03h

Balanço de C: $3a = c$, *balanço de H:* $8a = 2d$, *balanço de O:* $2b = 2c + d$. *São 3 equações e 4 variáveis:*

$$\begin{cases} 3a & +0b & -1c & +0d & = & 0 \\ 8a & +0b & +0c & -2d & = & 0 \\ 0a & +2b & -2c & -1d & = & 0 \end{cases}.$$

Exemplo 2.3 *Foram realizadas medições de dados bidimensionais (por exemplo distância percorrida e consumo de combustível de um automóvel) obtendo-se* N *pontos* (x_i, y_i) *no plano. Sabendo-se que a relação deve ser linear, qual a equação da reta que melhor aproxima esta relação?*

Precisamos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ *tal que a reta* $y = ax + b$ *passe o mais perto possível (em sentido a ser precisado) de todos os pontos* (x_i, y_i)*, como indicado na Figura 2.1. A resposta é dada através do chamado método de* ***mínimos quadrados*** *(veja Seção 5.3 da p.143), que busca solução aproximada (com menor erro) do sistema com 2 variáveis* (a, b) *e* N *equações:*

$$\begin{cases} ax_1 + b & = & y_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ ax_N + b & = & y_N. \end{cases}$$

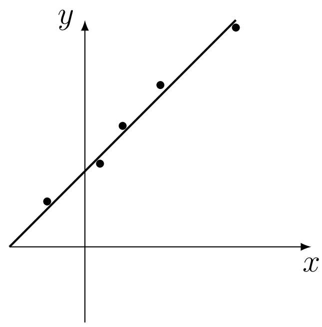


Figura 2.1: Reta Aproximada

Exemplo 2.4 *Determine, caso exista, uma parábola* γ *da forma* $y = ax^2 + bx + c$ *que passa pelos pontos* $(0, 1)$*,* $(1, 3)$*,* $(2, 4)$ *e* $(3, 9)$*. Caso não exista, determine uma parábola que melhor aproxima estes pontos.*

$$\begin{array}{lcl} (0,1) \in \gamma & \Rightarrow & 1 = a(0^2) + b(0) + c \\ (1,3) \in \gamma & \Rightarrow & 3 = a(1^2) + b(1) + c \\ (2,4) \in \gamma & \Rightarrow & 4 = a(2^2) + b(2) + c \\ (3,9) \in \gamma & \Rightarrow & 9 = a(3^2) + b(3) + c \end{array}$$

Obtemos um sistema com 4 *equações e 3 variáveis* (a, b, c)*:*

$$\begin{cases} 0a & +0b & +1c & = & 1 \\ 1a & +1b & +1c & = & 3 \\ 4a & +2b & +1c & = & 4 \\ 9a & +3b & +1c & = & 9 \end{cases}.$$

Exemplo 2.5 *Determine a função cúbica da forma* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *que melhor aproxima a função* $\cos(x)$ *nos pontos* k_i *com* $i = 1, \ldots, N$ *(*N *tão grande quanto se queira). Observe o exemplo anterior para obter:*

$$\begin{cases} ak_1^3 & +bk_1^2 & +ck_1 & +d & = & \cos(k_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ak_N^3 & +bk_N^2 & +ck_N & +d & = & \cos(k_N) \end{cases}.$$

Resolvemos este exemplo com o `Maxima` *no Apêndice B.12 da p.246.*

Exemplo 2.6 *Queremos determinar a distribuição de temperatura no interior da placa representada na Figura 2.2 sabendo a temperatura em volta desta placa, conforme indicado na figura. Para isto vamos utilizar um princípio físico que garante (de forma aproximada) que a temperatura em um vértice é igual a média das temperaturas dos quatro vértices mais próximos. Deste modo, a temperatura* a *por exemplo é igual a* $(20 + 25 + b + d)/4$. *Procedendo desta forma obtemos 6 equações e 6 variáveis* (a, b, c, d, e, f):

$$\begin{cases} 4a - b - d & = & 45 \\ 4b - a - c - e & = & 15 \\ 4c - b - f & = & 25 \\ 4d - e - a & = & 55 \\ 4e - b - d - f & = & 20 \\ 4f - c - e & = & 35 \end{cases}.$$

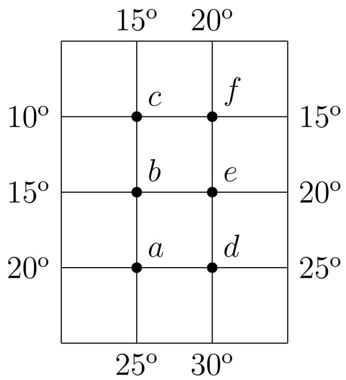


Figura 2.2: Placa Aquecida

Observação 2.1 ***Porque Resolver Sistema com muitas equações/variáveis?***
No Exemplo 2.5 podemos ter N *(o número de pontos) tão grande quanto se queira. No Exemplo 2.6 poderíamos utilizar, ao invés de uma malha* 4×5, *uma malha* 100×100 *(em torno de* 10 *mil variáveis). Ou então considerar a distribuição de calor em uma peça sólida, com três dimensões espaciais. Neste caso, utilizando um malha de* $100 \times 100 \times 100$, *chegamos a cerca de* 1 *milhão de variáveis.*
Surge desta forma, naturalmente, a resolução de sistemas com ***muitas*** *equações e* ***muitas*** *variáveis.*

Exemplo 2.7 *Determinar o fluxo de carros em ruas faz parte do planejamento urbano de uma cidade. Outros fluxos importantes são de água, corrente elétrica, mercadoria, ou bytes (internet). Nesses sistemas existem vias (ruas, canos, estradas ou fios) que transportam estes* *fluxos e que devem ser planejados de forma a suportar as capacidades. Estes problemas são modelados por sistemas lineares. Consulte livros de álgebra linear ou Wikipedia para detalhes sobre estes modelos.*

Exemplo 2.8 *O vetor* $(0,6,10)$ *é combinação linear de* $(1,2,3)$*,* $(2,1,1)$ *e* $(4,-1,-3)$*?*

Precisamos saber existem α,β,γ *tais que* $\alpha(1,2,3)+\beta(2,1,1)+\gamma(4,-1,-3) =$
$= (\alpha,2\alpha,3\alpha)+(2\beta,\beta,\beta)+(4\gamma,-\gamma,-3\gamma) = (\alpha+2\beta+4\gamma,\ 2\alpha+\beta-\gamma,\ 3\alpha+\beta-3\gamma) =$
$= (0,6,10)$.

Assim precisamos determinar α,β,γ *tais que:* $\left\{\begin{array}{rrrcr} 1\alpha & +2\beta & +4\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +1\beta & -1\gamma & = & 6 \\ 3\alpha & +1\beta & -3\gamma & = & 10 \end{array}\right.$.

Destes exemplos concluímos que:

- sistemas lineares modelam problemas bem distintos entre si;
- problemas da Álgebra Linear recaem na resolução de sistemas lineares de modo que as técnicas para resolvê-los nos acompanharão por todo o curso;
- facilmente os sistemas podem ter milhares de variáveis — neste caso a teoria será fundamental para se entender as soluções que serão geradas por *softwares* de computação científica.

2.2 Matrizes e Vetores do $\mathbb{R}^n$

Definição 2.1 (matriz) *Uma **matriz** A sobre um conjunto $\mathbb{K}$ (neste texto sempre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, mas pode-se ter $\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ etc.) é um arranjo num retângulo $m\times n$ (m linhas e n colunas) de mn elementos $a_{ij}\in\mathbb{K}$ ($i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$):*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Escrevemos também que $A=(a_{ij})$, onde o número de linhas e colunas fica subentendido pelo contexto.

Observação 2.2 *Para lembrar da convenção que matriz $m\times n$ significa m linhas e n colunas observe que quando queremos localizar uma letra numa página (arranjo retangular) falamos que ela está na linha m, coluna n: é natural dizer a linha primeiro.*

Definição 2.2 (espaço das matrizes) *Denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ seria mais preciso) o conjunto das matrizes sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ com m linhas e n colunas.*

Vetor como Matriz com uma Coluna

Vimos na Definição 1.1 da p.1 que um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é representado por $\mathbf{u} = (a_1,\ a_2, \dots, a_{n-1},\ a_n)$. Podemos representar o **mesmo** vetor $\mathbf{u}$ como um elemento de $\mathcal{M}_{n\times 1}$ (matrizes com uma única coluna) por $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$.

Faremos esta identificação entre vetores e matrizes com uma coluna (veja Lema 4.48 da p.121): $\mathbb{R}^n \sim \mathcal{M}_{n\times 1}$. Esta identificação é uma bijeção entre os dois conjuntos (porque?). Por exemplo, determinamos o **mesmo** vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ por $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ (uso correto) ou $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ (é um abuso de notação pois um vetor é uma n-upla e não uma matriz coluna).

Observação 2.3 *Alguns livros definem vetor do $\mathbb{R}^n$ como uma matriz com uma coluna. Existem 2 problemas nessa abordagem:*
(a) Veremos na Seção 4.7 da p.118 que o mesmo vetor, dependendo da base escolhida, será representado por uma matriz coluna distinta.
(b) O $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ por ele mesmo n vezes, o que implica que seus elementos são n-uplas de elementos de $\mathbb{R}$.
Um vetor pode ser identificado com uma matriz com uma linha — faremos isto ocasionalmente para interpretar o produto matriz vetor — mas a convenção utilizada em ***todos*** *os livros é como uma matriz com uma coluna.*

2.3 Interpretação de Sistemas em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Vamos discutir e interpretar geometricamente soluções de sistemas lineares em $\mathbb{R}$ (reta), $\mathbb{R}^2$ (plano) e $\mathbb{R}^3$ (espaço). Na Seção 2.8 da p.56 retomamos a interpretação geométrica, generalizando-a para $\mathbb{R}^n$.

2.3.1 Na Reta ($\mathbb{R}$)

O sistema mais simples que existe é o sistema 1×1 (1 variável e 1 equação): determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left\{\ ax = b\right. .$$

Para resolvê-lo, consideramos três casos:

(a) se $a \neq 0$, então $x = a^{-1}b$: sistema **com solução única**;

(b) se $a = b = 0$, então qualquer $x \in \mathbb{R}$ é solução: sistema **com infinitas soluções**;

(c) se $a = 0$ e $b \neq 0$, então nenhum $x \in \mathbb{R}$ é solução: sistema **sem solução**.

No ensino médio aprendemos a generalizar esta análise para sistemas 2×2 e 3×3 da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Se $\det(A) \neq 0$ (similar a condição $a \neq 0$ acima), então existe **solução única** $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Caso contrário, dependendo de condições que relacionam A e $\mathbf{b}$, o sistema possui **infinitas soluções** ou **não existe solução**.

Observação 2.4 *Classificamos os sistemas lineares como* ***sem solução****,* ***com solução única*** *ou* ***com infinitas soluções****. No ensino médio utiliza-se outro vocabulário (que não utilizaremos):*

- ***sem solução****: incompatível ou impossível ou inconsistente;*
- ***com solução****: compatível ou possível ou consistente;*
- ***com solução única****: (compatível ou consistente ou possível e) determinado*
- ***com infinitas soluções****: (compatível ou consistente ou possível e) indeterminado.*

Observação 2.5 *É utilizado como sinônimo de* ***variável*** *o termo* ***incógnita****.*

2.3.2 No Plano ($\mathbb{R}^2$)

No sistema $\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \quad (r_1) \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \quad (r_2), \end{array}\right.$ cada equação representa uma reta (r_1 e r_2). Resolver o sistema equivale a buscar interseções destas retas. Por outro lado o sistema pode ser escrito como

$$x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Definindo vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

resolver o sistema corresponde a determinar se existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{b},$$

ou seja determinar se $\mathbf{b}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Na linguagem de espaço gerado, queremos saber se

$$\mathbf{b} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

Interpretações da Solução de Sistema 2×2

(a) Interseção de 2 retas (interpretação geométrica).
(b) O vetor "lado direito" do sistema está no espaço gerado pelas colunas da matriz do sistema (interpretação algébrica).

Exemplo 2.9 (solução única) *Considere o sistema* $\left\{\begin{array}{rrcll} 1x & +1y & = & 2 & (r_1) \\ 1x & -1y & = & 0 & (r_2) \end{array}\right.$.

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *A Figura 2.3 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que possui* ***solução única*** *igual ao ponto $(1, 1)$: no lado esquerdo a interseção de duas retas, no lado direito observe que $\mathbf{b}$ é combinação linear única de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (mais exatamente, neste caso $\mathbf{b} = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2$). Assim $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.*

Exemplo 2.10 (sem solução) *Considere o sistema* $\left\{\begin{array}{rrcll} 1x & -2y & = & 2 & (r_1) \\ -2x & +4y & = & 2 & (r_2) \end{array}\right.$.

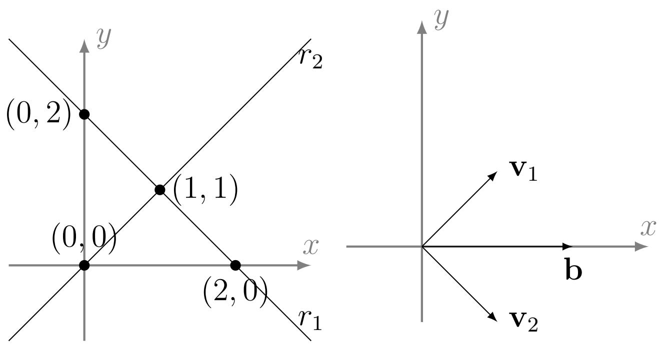


Figura 2.3: Solução Única

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. *A Figura 2.4 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que é* ***sem solução****: no lado esquerdo duas retas paralelas (portanto sem interseção), no lado direito observe que* $\mathbf{b}$ *não é combinação linear de* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *pois ambos estão na mesma reta. Portanto qualquer combinação deles ficará nesta mesma reta. Assim* $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

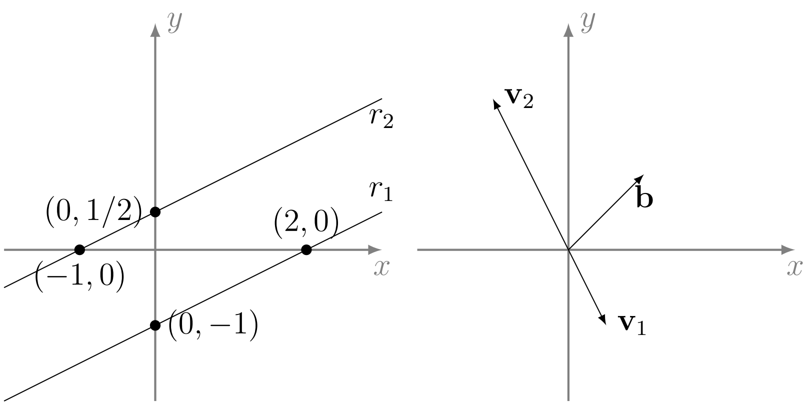


Figura 2.4: Sem Solução

Exemplo 2.11 (infinitas soluções) *Considere o sistema* $\left\{ \begin{array}{rrcrl} 1x & -2y & = & 2 & (r_1) \\ -2x & +4y & = & -4 & (r_2) \end{array} \right.$.

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. *A Figura 2.5 apresenta as duas interpretações para a solução deste sistema, que possui* ***infinitas soluções****: no lado esquerdo duas retas coincidentes, no lado direito observe que* $\mathbf{b}$ *pode ser escrito de infinitas formas como combinação linear de* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *pois os três estão na mesma reta. Por exemplo,* $\mathbf{b} = 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - 1/2\mathbf{v}_2$. *O conjunto-solução nesse caso será (verifique!)* $\{(0,2) + t(1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é a reta* $(0,2) + \langle (1,-1) \rangle$. *Assim* $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Exemplo 2.12 (sem solução) *Considere o sistema* $\left\{ \begin{array}{rrcrl} 1x & +1y & = & 2 & (r_1) \\ 0x & +1y & = & 0 & (r_2) \\ 1x & +0y & = & 0 & (r_3) \end{array} \right.$.

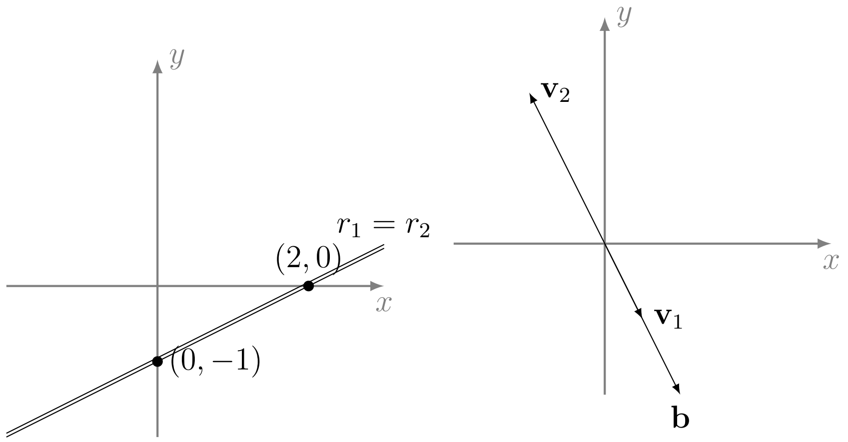


Figura 2.5: Infinitas Soluções

Defina $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *A Figura 2.6 apresenta a interpretação geométrica para a solução deste sistema, que é* ***sem solução****: são três retas que não se interceptam no mesmo ponto. Observe que* $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ *(porque? prove isso).*

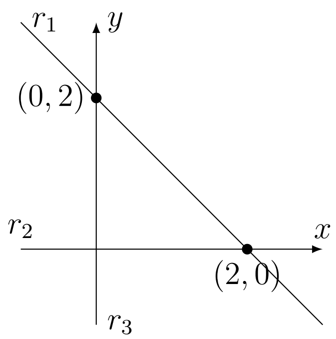


Figura 2.6: Sem Solução

Vamos fazer um resumo do que fizemos do ponto de vista geométrico. Como cada equação da forma $ax + by = c$ representa uma reta em $\mathbb{R}^2$, um sistema com 2 equações corresponde, geometricamente, a um dos três casos:

(a) 2 retas (não-paralelas e não coincidentes) se interceptando num ponto: **solução única**, conjunto-solução é um ponto;

(b) 2 retas paralelas não-coincidentes: **sem solução**, conjunto-solução é vazio;

(c) 2 retas coincidentes: **infinitas soluções**, conjunto-solução é uma reta.

Vamos ver, de forma sistemática, todas interpretações geométricas de um sistema com 3 equações em $\mathbb{R}^2$. Convidamos o leitor a fazer os desenhos correspondentes.

Partindo de 2 retas r_1 e r_2 não-paralelas e não-coincidentes, considere a ponto $P = r_1 \cap r_2$ (interseção das retas):

(a) terceira reta contém o ponto P: **solução única**, conjunto-solução é um ponto;

(b) terceira reta não contém o ponto P: **sem solução**, conjunto-solução é vazio. Neste caso as 3 retas formam um triângulo (faça uma figura!);

Partindo de 2 retas paralelas não-coincidentes:

(c) independente da posição da terceira reta: **sem solução**, conjunto-solução é vazio.

Partindo de 2 retas coincidentes $r_1 = r_2$:

(d) terceira reta intercepta r_1 mas não é coincidente: **solução única**, conjunto-solução é um ponto;

(e) terceira reta é coincidente a r_1: **infinitas soluções**, conjunto-solução é uma reta.

2.3.3 No Espaço ($\mathbb{R}^3$)

Nesta seção convidamos o leitor a verificar cada interpretação representando os planos com folhas de papel, as mãos, paredes e chão da sala, etc. Isto é **muito importante** para desenvolver a intuição para o que se segue. Ajuda também representar o plano $x = y$ em $\mathbb{R}^3$ como a reta $x = y$ em $\mathbb{R}^2$ e colocar o eixo z saindo do papel.

A equação $ax + by + cz = d$ representa um plano em $\mathbb{R}^3$. Assim determinar a solução de um sistema com 2 equações corresponde, geometricamente, a determinar a interseção de 2 planos. As possibilidades são:

(a) 2 planos (não-paralelos e não coincidentes) se interceptando numa reta: **infinitas soluções**, conjunto-solução é uma reta;

(b) 2 planos paralelos não-coincidentes: **sem solução**, conjunto-solução é vazio.

(c) 2 planos coincidentes: **infinitas soluções**, conjunto-solução é um plano.

Vamos ver, de forma sistemática, todas interpretações geométricas de um sistema com 3 equações em $\mathbb{R}^3$. Partindo de 2 planos Π_1 e Π_2 não-paralelos e não-coincidentes, considere a reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ (interseção dos planos):

(a) terceiro plano não é paralelo à reta r: **solução única**, conjunto-solução é um ponto;

(b) terceiro plano é paralelo não coincidente à reta r: **sem solução**, conjunto-solução é vazio. Neste caso os 3 planos formam um prisma triangular (tente visualizar isto!);

(c) terceiro plano contém a reta r: **infinitas soluções**, conjunto-solução é a reta r;

Partindo de 2 planos paralelos não-coincidentes:

(d) independente da posição do terceiro plano: **sem solução**, conjunto-solução é vazio.

Partindo de 2 planos coincidentes $\Pi_1 = \Pi_2$:

(e) terceiro plano intercepta Π_1 mas não é coincidente: **infinitas soluções**, conjunto-solução é uma reta;

(f) terceiro plano é coincidente a Π_1: **infinitas soluções**, conjunto-solução é um plano.

Esta análise pode ser feita para 4 equações também. Na Seção 2.8 da p.56 apresentamos a interpretação geométrica de sistemas em $\mathbb{R}^n$ com qualquer número de variáveis. Note que no $\mathbb{R}^3$ o conjunto-solução pode ser infinito de 2 formas: um plano ou uma reta.

2.4 Operações Elementares e Sistemas Equivalentes

Definição 2.3 (matriz de coeficientes, matriz aumentada e lado direito) *Considere o sistema, com m equações em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Definimos como matriz de coeficientes, matriz aumentada (ou ampliada) e o lado direito do sistema acima as matrizes indicadas na figura abaixo.

$$\overbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]}^{\textbf{matriz aumentada ou ampliada}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textbf{matriz de coeficientes}}\ \underbrace{\qquad}_{\textbf{lado direito}}$$

Note que a matriz de coeficientes possui m linhas e n colunas que correspondem as m equações em n variáveis do sistema.

Observação 2.6 *É comum o abuso de linguagem "considere o sistema A", onde A é a matriz aumentada do sistema a ser considerado.*

Quando a matriz de coeficientes possui algumas formas particulares, o sistema pode ser resolvido facilmente. O primeiro caso é quando a matriz de coeficientes é **diagonal**: a solução do sistema é imediata.

Definição 2.4 (matriz diagonal) *A é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.*

Exemplo 2.13 *São matrizes diagonais:* $\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.14 *Resolva o sistema* $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right]$.

Solução: *A matriz ampliada corresponde ao sistema:* $\begin{cases} 3x_1 & = & 5 \\ -2x_2 & = & 4 \\ x_3 & = & -2 \end{cases}$. *O conjunto-solução é* $\left\{\left(\frac{5}{3}, -2, -2\right)\right\}$. ■

Outro caso fácil é quando matriz de coeficientes é **triangular**.

Definição 2.5 (matriz triangular superior) *A é **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.*

Exemplo 2.15 *É triangular superior:* $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 12 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Observação 2.7 *Existe definição similar de matriz **triangular inferior**, cuja definição deixamos para o leitor.*

Quando a matriz é **triangular superior** a solução é calculada através da **substituição para trás**. Começando-se da última equação, onde se determina a última variável, determina-se cada variável, sucessivamente, de trás para frente.

Exemplo 2.16 *Resolva o sistema* $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$.

Solução: *A matriz ampliada corresponde ao sistema:* $\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = & -5 \\ & & 2x_3 & = & -2 \end{array}\right.$ *. Fazendo a **substituição para trás**, calculamos primeiro x_3 da última equação. Substituímos seu valor na segunda equação e obtemos x_2. Finalmente, substituindo x_1 e x_2 na primeira equação, calculamos x_1:*

$$\begin{array}{rrrcrcrcr} & & 2x_3 & = & -2 & \Rightarrow & x_3 & = & -1 \\ & -2x_2 & +(-1) & = & -5 & \Rightarrow & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & +(2) & +3(-1) & = & 2 & \Rightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}.$$

■

Definição 2.6 (sistemas equivalentes) *Dois sistemas (nas mesmas variáveis) são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto-solução.*

Exemplo 2.17 *Os dois sistemas da Figura 2.7 são equivalentes, embora com número de equações distintas, pois possuem o mesmo conjunto-solução $\{(1,1)\}$.*

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$

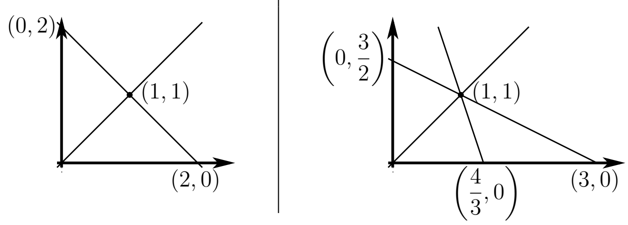


Figura 2.7: Sistemas equivalentes

A estratégia para Solução de Sistemas Lineares é transformar um sistema qualquer num sistema **equivalente** (mesmo conjunto-solução) "fácil":

- na **forma escalonada** ("tipo" triangular superior, ver Definição 2.10 da p.41) ou
- na **forma totalmente escalonada** ("tipo" diagonal, ver Definição 2.12 da p.42).

Para isto precisamos ver como gerar sistemas equivalentes utilizando as **operações elementares**, que são efetuadas na matriz aumentada de um sistema. Estas operações podem ser vistas também como operações nas equações do sistema, embora quando efetuamos os cálculos fazemos as operações diretamente na matriz aumentada.

Definição 2.7 (operações elementares) *São **operações elementares** numa matriz (l_i é a i-ésima linha):*

(a) trocar a ordem das linhas: (denotado $l_i \leftrightarrow l_j$):

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, l_i \,\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}\, l_j \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, l_j \,\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}\, l_i \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(b) multiplicar uma linha por $k \neq 0$: (denotado $l_i \leftarrow kl_i$):

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, l_i \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, kl_i \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra (denotado $l_j \leftarrow l_j + kl_i$):

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, l_i \,\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}\, l_j \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---}\, l_i \,\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}\, l_j + kl_i \,\text{---} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(d) descartar ou acrescentar linhas só de zeros:

$$\begin{bmatrix} \text{---}\, l_1 \,\text{---} \\ \vdots \\ 0\;0\;\cdots\;0\;0 \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \text{---}\, l_1 \,\text{---} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Definição 2.8 (matriz equivalente) *Uma matriz A é **equivalente** a B se pode ser obtida por meio de uma sequencia de operações elementares. Denotamos $A \sim B$.*

Lema 2.9 (sistemas e matrizes equivalentes) *Sejam A e B matrizes aumentadas de dois sistemas (nas mesmas variáveis). Se as matrizes são equivalentes ($A \sim B$), então os sistemas correspondentes são equivalentes (possuem mesmo conjunto-solução).*

Prova: Cada uma das operações elementares efetuadas na matriz aumentada de um sistema corresponde a uma operação nas equações desse sistema que não altera o conjunto-solução:

(a) trocar a ordem das linhas: trocar ordem das equações em um sistema não altera o conjunto-solução.

(b) multiplicar uma linha por um escalar não-nulo: substituir a equação $A = B$ por $kA = kB$. Isto não altera o sistema pois se $A = B$, então $kA = kB$ (isto é verdade mesmo se $k = 0$). Por outro lado se $kA = kB$, como $k \neq 0$, multiplicamos os dois lados por k^{-1} e obtemos que $A = B$. Portanto não alteramos o conjunto-solução.

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra: substituir as equações (correspondentes a linhas i e j) $\left\{\begin{array}{rcl} A & = & B \\ C & = & D \end{array}\right.$ por $\left\{\begin{array}{rcl} A & = & B \\ C+kA & = & D+kB \end{array}\right.$. Se $C = D$, como $A = B$, $kA = kB$ para qualquer k (mesmo $k = 0$). Somando esta equação nos dois lados de $C = D$ obtemos que $C + kA = D + kB$. Por outro lado, suponha que $C + kA = D + kB$. Como $A = B$, $kA = kB$ para qualquer k. Logo subtraindo kA dos dois lados de $C+kA = D+kB$, obtemos $C = D + kB - kA = D$.

(d) descartar (ou acrescentar) linhas só de zeros: eliminar (ou acrescentar) a uma equação sempre verdadeira ($0 = 0$), que não altera o conjunto-solução. ■

Observação 2.8 *Dessas operações podemos deduzir outras como por exemplo: "se duas linhas são iguais, uma delas pode ser descartada". Isto porque o sistema* $\left\{\begin{array}{rcl} B & = & C \\ B & = & C \end{array}\right.$ *equivale a* $\left\{\begin{array}{rcl} B & = & C \\ B-B & = & C-C \end{array}\right.$ *tomando $k = -1$ na operação (c). Portanto obtemos o sistema* $\left\{\begin{array}{rcl} B & = & C \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$. *Pela operação (d) este é equivalente a* $\left\{\begin{array}{rcl} B & = & C \end{array}\right.$.

Deve-se tomar cuidado pois nem toda operação gera sistemas equivalentes. No próximo exemplo ilustramos um erro que não é comum mas serve para ajudar a entender o exemplo depois desse.

Exemplo 2.18 *Embora possamos substituir uma linha pela soma dela com outra, não podemos fazer isto* ***simultaneamente*** *com duas linhas pois senão transformaríamos o sistema* $\left\{\begin{array}{l} A = B \\ C = D \end{array}\right.$ *em* $\left\{\begin{array}{l} A+C = B+D \\ A+C = B+D \end{array}\right.$. *Mas este sistema é equivalente a* $\left\{\begin{array}{l} A+C = B+D \end{array}\right.$ *pela observação anterior.*

Vamos ver num caso particular. Considere $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right.$ *cujo conjunto-solução é* $\{(1,2)\}$. *Somando as duas linhas simultaneamente obtemos* $\left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 3 \\ 3x & = & 3 \end{array}\right.$ *cujo conjunto-solução é* $\{(x,y) = (1,t); t \in \mathbb{R}\}$.

Note que isto é diferente de substituir a primeira linha pela soma dela com a segunda obtendo $\left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 3 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right.$ *e depois substituir a segunda linha pela soma dela com a primeira obtendo* $\left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 3 \\ 5x-y & = & 3 \end{array}\right.$. *Note que preservamos o conjunto-solução* $\{(1,2)\}$.

O erro apresentado no exemplo anterior dificilmente é cometido. No próximo exemplo apresentamos um $\boxed{\textbf{erro comum}}$ cometido por alunos que não aplicam uma operação elementar de cada vez. Ocorre quando substituímos sem ter um algoritmo.

Exemplo 2.19 *Considere o sistema* $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ y+z &= 2 \\ x+y &= 2 \end{cases}$ *cuja solução única é* $x=y=z=$

1. *Na forma matricial ele corresponde a* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$. *Vamos fazer* ***simultaneamente*** $l_1 \leftarrow l_1 - l_2$, $l_2 \leftarrow l_2 - l_3$, $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$, *obtendo* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$. *Isto corresponde ao sistema* $\begin{cases} x &= 1 \\ -x+z &= 0 \\ -z &= -1 \end{cases}$ *cuja solução é* $x=z=1$ *e* y *pode assumir qualquer valor. Portanto o conjunto-solução é* $\{(x,y,z) = (1,t,1) = (1,0,1) + t(0,1,0),\ t \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é a reta* $(1,0,1) + \langle(0,1,0)\rangle$. *Note que o conjunto-solução foi modificado.*

Observação 2.9 *O último exemplo mostra a importância de sermos* ***extremamente*** *cuidadosos quando aplicamos as operações elementares, aplicando uma de cada vez.*

Antes de apresentar um algoritmo (Eliminação de Gauss p.42) para resolver sistemas lineares, vamos apresentar, através de um exemplo, a transformação de um **sistema linear qualquer**, utilizando somente as **operações elementares**, num **sistema equivalente diagonal**, que pode ser facilmente resolvido.

Exemplo 2.20 *Considere o sistema* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 3 & 13 & 4 & 16 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow l_3 + 3l_1$, *calculamos* $\begin{array}{rrrrrr} & & 3 & 13 & 4 & 16 \\ + & 3\times(& -1 & -2 & -4 & 2\ ) \end{array} = \begin{array}{rrrrr} & 3 & 13 & 4 & 16 \\ + & -3 & -6 & -12 & 6 \\ \hline & 0 & 7 & -8 & 22 \end{array}$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 7 & -8 & 22 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow l_3 + l_2$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & 0 & -7 & 11 & -25 \\ + & 0 & 7 & -8 & 22 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_3 \leftarrow \frac{1}{3}l_3$, *obtemos* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$.
Para fazer $l_1 \leftarrow l_1 + 4l_3$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & -1 & -2 & -4 & 2 \\ + & 0 & 0 & 4 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array}$. *Para fazer* $l_2 \leftarrow l_2 - 11l_3$ *calculamos* $\begin{array}{rrrrr} & 0 & -7 & 11 & -25 \\ + & 0 & 0 & -11 & 11 \\ \hline & 0 & -7 & 0 & -14 \end{array}$. *Obtemos então* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_2 \leftarrow -\frac{1}{7}l_2$, *obtemos* $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Fazendo* $l_1 \leftarrow l_1 + 2l_2$ *calculamos*

$$\begin{array}{rrrrr} & -1 & -2 & 0 & -2 \\ + & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$ *e obtemos* $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Finalmente fazendo* $l_1 \leftarrow -l_1$ *obtemos o* $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

Agora o sistema é ***diagonal*** *e pode ser facilmente resolvido:* $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$. *Portanto o conjunto-solução é* $\{(-2, 2, -1)\}$.

2.5 Resolvendo Sistemas Lineares

O plano de ação para a solução de sistemas lineares é:

- definir o que é a **forma escalonada** e **forma totalmente escalonada** de uma matriz;
- apresentar o **algoritmo de eliminação de Gauss** que transforma uma matriz qualquer para forma escalonada ou totalmente escalonada. Também chamado de **escalonamento**.
- resolver um sistema cuja matriz aumentada está na forma (totalmente) escalonada.

2.5.1 Escalonamento

Definição 2.10 (forma escalonada) *Diz-se que uma matriz está (na forma)* ***escalonada*** *("tipo" triangular superior) se:*

- ***o número de zeros no início de cada linha aumenta estritamente*** *de uma linha para outra exceto se a linha é toda nula.*
- *as linhas nulas, caso existam, são as últimas da matriz.*

Exemplo 2.21 *Determine se estão na forma escalonada:*

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 6 \end{bmatrix}$; *(b)* $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; *(d)* $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) não; (b) sim; (c) sim; (d) não.* ■

Definição 2.11 (pivô) *São denominados* ***pivôs*** *os primeiros elementos não nulos de cada linha (não nula) de uma matriz escalonada.*

Observação 2.10 (pivôs são de colunas distintas) *Pela definição o número de pivôs é igual ao número de linhas não nulas. Como o número de zeros aumenta estritamente numa matriz escalonada, os pivôs ocupam colunas distintas. Assim o número de pivôs é menor ou igual ao número de colunas. Temos portanto que:*

$$\text{número linhas não nulas} = \text{número de pivôs} \leq \text{número de colunas}$$

Exemplo 2.22 *Na matriz abaixo são pivôs (indicados em negrito)* $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{-13}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{4} & -7 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-13} & 6 \end{bmatrix}$$

Definição 2.12 (forma totalmente escalonada) *Uma matriz escalonada está* ***totalmente escalonada*** *ou* ***escalonada reduzida*** *("tipo" diagonal) se os seus pivôs:*

- *são todos 1's e*
- *são os únicos elementos não-nulos de suas colunas.*

Exemplo 2.23 *Determine se estão na forma* ***totalmente*** *escalonada:*

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) não; (b) sim; (c) não; (d) sim.* ■

Vamos descrever o algoritmo de **Eliminação de Gauss**, também chamado de **escalonamento**. Através dele, dada uma matriz A qualquer obtemos uma matriz B (totalmente) escalonada equivalente a A. Ele é dividido em duas partes.

Algoritmo 2.13 (Eliminação de Gauss Parte I: Forma Escalonada)

(a) $p \leftarrow$ *(nº de linhas não nulas).*

(b) $k \leftarrow 1$.

(c) Enquanto $k < p$, *repita:*

- *Considere apenas as linhas* $l_k,\ l_{k+1}, \ldots, l_p$.
- *Identifique a coluna não nula mais à esquerda.*
- *Troque linhas para obter pivô não nulo.*
- *Anule entradas abaixo do pivô subtraindo de* $l_{k+1}, \ldots, l_p$ *múltiplos de* l_k.
- $p \leftarrow$ *(nº de linhas não nulas).*
- $k \leftarrow k + 1$.

Algoritmo 2.14 (Eliminação de Gauss Parte II: Forma Totalmente Escalonada)

(a) Execute a Parte I do algoritmo.

(b) Repita, para $k = p,\ p-1,\ \ldots, 1$:

- *Divida l_k pelo seu pivô, tornando-o 1.*
- *Se $k > 1$ anule entradas acima do pivô subtraindo de $l_1, \ldots, l_{k-1}$ múltiplos de l_k.*

Observação 2.11 *Alguns livros chamam a Parte I de* ***eliminação de Gauss*** *e a Parte I + Parte II de* ***eliminação de Gauss-Jordan***.

Vamos aplicar o algoritmo em detalhes na matriz $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{bmatrix}$.

Início da Parte I: Vamos escalonar a matriz.
(a) $p \leftarrow 4$.
(b) $k \leftarrow 1$.
(c) Início do primeiro laço.
• Considere apenas as linhas l_1, l_2, l_3 e l_4 (ou seja, todas as linhas).

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda: $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{bmatrix}$.

• Troque linhas para obter $\boxed{\text{pivô}}$ não nulo (como o pivô não é nulo, não precisa fazer nada).

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\text{pivô}}$ **2**, subtraindo de l_2, l_3, l_4 múltiplos de l_1. Fazendo $l_2 \leftarrow l_2 - l_1,\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1, l_4 \leftarrow l_4 - 3l_1$ obtemos: $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

• $p \leftarrow 4$.
• $k \leftarrow 2$.
(c) Início do segundo laço.

• Considere apenas as linhas 2, 3 e 4 (ignore a primeira): $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

• Troque linhas para obter $\boxed{\text{pivô}}$ não nulo: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{1}$, subtraindo de l_3 e de l_4 múltiplos de l_2. Fazendo $l_4 \leftarrow l_4 + 2l_2$ (l_3 já está com entrada zerada abaixo do pivô) obtemos: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-\mathbf{1}} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

• $p \leftarrow 4$.

• $k \leftarrow 3$.

(c) Início do terceiro laço.

• Considere apenas as linhas 3 e 4 (ignore a primeira e a segunda): $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

• Identifique a coluna não nula mais à esquerda. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\mathbf{3}} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

• Troque linhas para obter $\boxed{\textbf{pivô}}$ não nulo (como o pivô não é nulo, não precisa fazer nada).

• Anule as entradas abaixo do $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{3}$, subtraindo de l_4 um múltiplo de l_3. Fazendo $l_4 \leftarrow l_4 + 1/3 l_3$ obtemos: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\mathbf{3}} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

• $p \leftarrow 3$.

• $k \leftarrow 4$.

(c) Fim do laço pois $k \geq p$. **Fim da Parte I**: matriz já está escalonada.

Início da Parte II: Vamos fazer o escalonamento total da matriz.

(b) Início do primeiro laço. $k \leftarrow 3$.

• Divida l_3 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{3}$ obtendo: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\textbf{pivô}}$, subtraindo de l_1, l_2 múltiplos de l_3. Faça $l_1 \leftarrow l_1 - l_3$ e $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$ obtendo: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Início do segundo laço. $k \leftarrow 2$.

• Divida l_2 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ $-\mathbf{1}$ obtendo: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\textbf{pivô}}$, subtraindo de l_1 múltiplos de l_2. Faça $l_1 \leftarrow l_1 - 3l_2$ obtendo: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{1}} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Início do terceiro laço. $k \leftarrow 1$.

• Divida l_1 pelo seu $\boxed{\textbf{pivô}}$ **2** obtendo: $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

• Anule as entradas acima do $\boxed{\textbf{pivô}}$ 1. Não tem nada a fazer (nenhuma linha está acima da primeira).

(b) Fim do laço pois $k = 1$. **Fim da Parte II**: a matriz está totalmente escalonada.

Observação 2.12 (Software Algébrico) *Resolvemos este exemplo no* `Maxima` *entrando com a matriz com o comando* `M: matrix([2,6,3,1,4], [2,6,3,-2,10], [-4,-12,-7,0,-10],[6,18,11,0,14]) ;` *e calculando a forma escalonada com* `echelon(M);` *Pode-se também escalonar manualmente utilizando o* `Maxima`. *Veja Apêndice B.5 da p.244.*

2.5.2 Análise Pós-Escalonamento

Para analisar o sistema após o escalonamento, introduzimos a seguinte notação para elementos da matriz: $\left\{ \begin{array}{lllllll} 0 & - & \text{zero;} & & \blacksquare & - & \text{não-zero;} \\ 1 & - & \text{um;} & & \star & - & \text{qualquer número.} \end{array} \right.$

Teorema 2.15 (existência e unicidade pela forma totalmente escalonada) *Através da forma* ***totalmente escalonada*** *da matriz aumentada de um sistema determinamos se ele possui solução e, caso possua, se ela é única. Após o descarte de linhas nulas, se estiver na:*

• *1º forma:* $\left[\begin{array}{cccc|c} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ *– sistema* ***sem solução****.*

• *2º forma:* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right]$ *– sistema* ***com solução única****.*

• *3º forma: nenhuma das anteriores – sistema* ***com infinitas soluções****.*

Prova: 1º forma: A última linha do sistema corresponde a equação $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$. Como $0 = 1$ não será verdade nunca, o conjunto-solução é vazio.

2º forma: O sistema correspondente é $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \star \\ x_2 & = & \star \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \star \end{array} \right.$. O conjunto-solução é $\{(\star, \star, \ldots, \star)\}$.

3º forma: Será provado no Teorema 2.18 da p.48. ∎

Exemplo 2.24 *Determine se o sistema é sem solução, com solução única ou com infinitas soluções:*

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right]$; *(b)* $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; *(c)* $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

(d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; *(e)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$; *(f)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$.

Solução: *(a) solução única; (b) sem solução; (c) infinitas soluções; (d) sem solução; (e) solução única; (f) infinitas soluções;* ■

Corolário 2.16 (existência e unicidade pela forma escalonada) *Através da forma* ***escalonada*** *da matriz aumentada de um sistema determinamos se o sistema possui solução e, caso possua, se ela é única. Após o descarte de linhas nulas, se estiver na:*

- *1º forma:* $\left[\begin{array}{cccc|c} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$ *– sistema* ***sem solução****.*
- *2º forma:* $\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \blacksquare & \star \end{array}\right]$ *– sistema* ***com solução única****.*
- *3º forma: nenhuma das anteriores – sistema* ***com infinitas soluções****.*

Prova: 1º forma: A última linha do sistema corresponde a equação $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0 = k \neq 0$. Como $0 \neq 0$ não será verdade nunca, o conjunto-solução é vazio.

2º forma: Fazendo a segunda parte do escalonamento obtemos uma matriz como na segunda forma do Teorema 2.15 da p.45. Segue o resultado.

3º forma: Será provado no Teorema 2.18 da p.48. ■

Exemplo 2.25 *Determine se o sistema é sem solução, com solução única ou com infinitas soluções:*

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 13 & 2 & 0 & -6 & 33 \\ 0 & 10^{-7} & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$; *(b)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\pi} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 311 \end{array}\right]$;

(c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & e^3 & 11 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \log(3) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 & -3 \end{array}\right]$; *(d)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 11 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Solução: *(a) com infinitas soluções; (b) sem solução; (c) com solução única pois todos os números* 2, e^3, $\log(3)$, 77 *são não-nulos; (d) com infinitas soluções.* ■

Concluímos que **não** precisamos fazer a forma totalmente escalonada para determinar se um sistema **possui** solução e se ela é única: para isto basta a forma escalonada. Mas, para **calcular** a solução, recomendamos fortemente que se escalone totalmente a matriz ao invés de se fazer a substituição para trás na matriz escalonada. A prática mostra que se reduzem erros numéricos desta forma.

Portanto, use a forma escalonada somente para decidir se o sistema possui solução: não use-o para calculá-la.

Em resumo, o **conjunto-solução** de um sistema **linear** de equações tem sempre:

- ou **uma única** solução;
- ou **nenhuma** solução;
- ou **infinitas** soluções.

Exemplo 2.26 (sistemas não lineares) *Num sistema não-linear com 2 equações — que correspondem a duas curvas no plano (ao invés de 2 retas) — podemos ter, além das opções acima, um número finito de soluções maior que um.*

(a) O sistema $\left\{ \begin{array}{r} y - x^2 = 0 \\ y = 4 \end{array} \right.$ *possui duas soluções:* $(2, 4)$ *e* $(-2, 4)$.

(b) O sistema representado na Figura 2.8 possui 5 *soluções.*

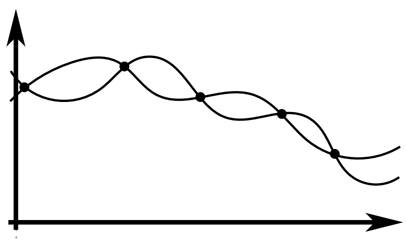


Figura 2.8: Sistema Não-linear

2.5.3 Sistemas com Infinitas Soluções

Definição 2.17 (variável dependente e independente (ou livre)) *Considere a matriz aumentada, totalmente escalonada, de um sistema linear. A cada* ***coluna****, exceto a última, da matriz corresponde uma variável do sistema linear. Chamamos de* ***variável dependente*** *aquela associada a coluna com pivô. Chamamos de* ***variável independente*** *ou* ***variável livre***[1] *aquelas que* ***não*** *são dependentes.*

Observação 2.13 *É utilizado como sinônimo de* ***variável dependente*** *o termo* ***variável líder*** *pois estão associadas a pivôs (líderes).*

Dentro da prova do próximo Teorema apresentamos o algoritmo de solução de um sistema linear. Sugerimos a leitura do Exemplo 2.27 da p.49 antes (e depois também!) de se dedicar ao entendimento do próximo teorema.

[1] O número de variáveis livres (e de variáveis dependentes) é uma propriedade do sistema de equações; a lista das variáveis livres dependente de como foi escalonada a matriz ampliada. Não vamos provar este fato.

Teorema 2.18 (Algoritmo para determinar conjunto-solução) *O conjunto-solução S (quando não-vazio) de um sistema linear é sempre a translação de um espaço gerado. Mais precisamente, existe $q \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto LI de vetores do $\mathbb{R}^n$: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ tais que*

$$S = \{\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_q\mathbf{v}_q, \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n, \; t_i \in \mathbb{R}\},$$

ou, em termos de espaço gerado,

$$S = \mathbf{v}_0 + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q \rangle .$$

Prova: Escalone totalmente a matriz aumentada do sistema.

Se a solução for única tome $q = 0$ e $\mathbf{v}_0$ a solução única.

Se tiver infinitas soluções tome q igual ao número de variáveis livres e siga o seguinte algoritmo:

Algoritmo de Solução de Sistemas com Infinitas Soluções:

(a) Após o escalonamento total do sistema, atribua a cada **variável livre**, um **parâmetro**, denotado por $t_1, t_2, \ldots, t_q$, que pode assumir qualquer valor.

(b) Considere o sistema nas **variáveis dependentes** obtido após eliminar linhas nulas e passe os parâmetros para o lado direito do sistema. Este será da forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right]$, onde cada $\star$ é da forma $\star + t_1 \star + \cdots + t_q\star$ (constante mais combinação linear dos parâmetros $t_1, \ldots, t_q$). Assim o sistema possui solução única em função dos parâmetros $t_1, t_2, \ldots, t_q$.

(c) Cada entrada do vetor solução $\mathbf{x}$ é igual a um dos parâmetros, caso seja variável livre, ou igual a constante mais combinação linear dos parâmetros $t_1, \ldots, t_q$, caso seja variável dependente. Logo $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_q\mathbf{v}_q$ para $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$.

Deixamos para o leitor provar que os vetores obtidos na parametrização são LIs pois a matriz está na forma totalmente escalonada e o pivô é o único elemento não nulo da coluna.

∎

Observação 2.14 *Resolver um sistema linear pelo método de eliminação de Gauss significa obter esta parametrização do conjunto-solução S de forma explícita: determinar quantos parâmetros q são necessários e quais são os vetores $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q$.*
Podemos classificar ***geometricamente*** *S de acordo com o valor de q: ponto ($q = 0$ parâmetros), reta ($q = 1$ parâmetro), plano ($q = 2$ parâmetros), etc.*
Alguns livros chamam o ***número de variáveis livres****, que é igual ao* ***número de parâmetros****, de* ***grau de liberdade*** *ou* ***grau de indeterminação*** *do sistema linear.*

Observação 2.15 *Após o escalonamento **total** de um sistema obtemos uma matriz com $n+1$ colunas (correspondendo ao total de n variáveis) e p linhas não-nulas, correspondendo ao número de **pivôs** ou de equações efetivas (as equações $0 = 0$ não são efetivas, pois podem ser eliminadas sem modificar o conjunto-solução) ou variáveis dependentes após o escalonamento.*
Em resumo temos que:
n = nº total de variáveis,
*p = nº de equações efetivas = nº de linhas não-nulas = nº de **pivôs** = nº de **variáveis dependentes**,*
*$n - p = q$ = nº de **variáveis livres ou independentes** = nº de **parâmetros**.*

Exemplo 2.27 *Determine o conjunto solução do sistema:*

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Solução: *Como as colunas com pivô são $1, 3, 5$, são 3 variáveis dependentes: x_1, x_3, x_5. São 2 variáveis livres: x_2 e x_4. Introduzindo parâmetros r e s (mais conveniente que t_1 e t_2) e atribuindo-os as variáveis livres obtemos que $x_2 = r$ e $x_4 = s$.*

O sistema pode ser reescrito como: $\left\{\begin{array}{rcl} 1x_1 & = & 4+3r-5s \\ 1x_3 & = & -2s \\ 1x_5 & = & -2 \end{array}\right.$.

Agora este é um sistema em 3 variáveis: x_1, x_3 e x_5 da forma: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4+3r-5s \\ 0 & 1 & 0 & -2s \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

Sabemos resolver esse sistema, que está no 1° caso do Teorema 2.15 da p.45. Ele possui solução única:
$(x_1, x_3, x_5) = (4 + 3r - 5s,\ -2s,\ -2)$. Como $x_2 = r$ e $x_4 = s$, obtemos que
$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (4 + 3r - 5s,\ r,\ -2s,\ s,\ -2)$ ou ainda:

$$\{(4, 0, 0, 0, -2) + r(3, 1, 0, 0, 0) + s(-5, 0, -2, 1, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Na linguagem de espaço gerado, o conjunto-solução é o plano

$$(4, 0, 0, 0, -2) + \langle (3, 1, 0, 0, 0), (-5, 0, -2, 1, 0) \rangle .$$

■

Neste exemplo o sistema possui um total de 5 variáveis e, por possuir 3 equações relacionando-as, ficou com somente $5 - 3 = 2$ variáveis livres para assumir qualquer valor. A essas duas variáveis (x_2 e x_4) foram atribuídos os dois parâmetros r, s e, utilizando as 3 equações remanescentes do sistema foram obtidas soluções em função destes parâmetros.

Observação 2.16 *Para o mesmo número total de variáveis, quanto maior o número de linhas não-nulas (equações efetivas) no sistema escalonado menor o número de variáveis livres.*
*Zerar uma linha reduz o número efetivo de equações do sistema. Isto significa que a equação era combinação linear das outras, sendo, portanto, **redundante** para a resolução do sistema.*

Observação 2.17 (Software Algébrico) *Resolvemos o exemplo anterior no `Maxima` com `linsolve([x-3*y+5*w=4, z+2*w=0, a=-2], [x,y,z,w,a]);`*

Exemplo 2.28 *Resolva o sistema:*

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Solução: *Como as colunas com pivô são* $2, 4, 5, 6$, *são* 4 *variáveis dependentes:* x_2, x_4, x_5, x_6. *São 3 variáveis livres:* x_1, x_3, x_7. *Introduzindo parâmetros* r, s, t *(mais conveniente que* t_1, t_2 *e* t_3*) e atribuindo-os as variáveis livres obtemos que* $x_1 = r,\ x_3 = s,\ x_7 = t$. *Das equações obtemos que* $x_2 = -2x_3 + x_7 = -2s + t,\ x_4 = 4 - 3x_7 = 4 - 3t,\ x_5 = -1,\ x_6 = 2 - 3x_7 = 2 - 3t$. *Portanto* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (r,\ -2s + t,\ s,\ 4 - 3t,\ -1,\ 2 - 3t,\ t)$, *ou ainda, o conjunto-solução é*

$$\{(0, 0, 0, 4, -1, 2, 0) + r(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + s(0, -2, 1, 0, 0, 0, 0) + t(0, 1, 0, -3, 0, -3, 1)\},$$

com $r, s, t \in \mathbb{R}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é*

$$(0, 0, 0, 4, -1, 2, 0) + \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -3, 0, -3, 1) \rangle.$$ ■

Exemplo 2.29 *Considere o sistema*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

(a) Determine o conjunto solução; *(b) Determine soluções particulares.*
Solução: *(a) Como as colunas com pivô são* $2, 4$, *são* 2 *variáveis dependentes:* x_2, x_4. *São 2 variáveis livres:* x_1, x_3.

Introduzindo parâmetros r, s *e atribuindo-os as variáveis livres obtemos que* $x_1 = r$ *e* $x_3 = s$. *Das equações obtemos que* $x_2 = -7 - 3x_3 = -7 - 3s$ *e* $x_4 = 4$. *Portanto* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r,\ -7 - 3s,\ s,\ 4)$, *ou ainda, o conjunto-solução é* $\{(0, -7, 0, 4) + r(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. *Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o plano* $(0, -7, 0, 4) + \langle (1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0) \rangle$.

(b) Obtemos soluções particulares fazendo variar os parâmetros r, s. *Por exemplo, tomando* $r = 0$ *e* $s = 0$, *obtemos a solução* $(0, -7, 0, 4) + 0(1, 0, 0, 0) + 0(0, -3, 1, 0) = (0, -7, 0, 4)$. *Obtemos outra solução tomando* $r = 3$ *e* $s = -2$: $(0, -7, 0, 4) + 3(1, 0, 0, 0) - 2(0, -3, 1, 0) = (3, -1, -2, 4)$. *Podemos obter* ***infinitas soluções*** *pois para cada escolha de valores para os parâmetros* r *e* s, *uma nova solução é gerada.* ■

Exemplo 2.30 *Considere os planos* $\Pi_1 = \{(1, -2, 1) + s(1, 1, 1) + t(-1, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ *e* $\Pi_2 = \{(3, 2, 1) + s(2, 1, 1) + t(1, 1, 2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. *Determine* $\Pi_1 \cap \Pi_2$.
Solução: *Queremos saber se existem* $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ *(note que trocamos os parâmetros do segundo plano) tais que* $(1, -2, 1) + s(1, 1, 1) + t(-1, 1, 0) = (3, 2, 1) + u(2, 1, 1) + v(1, 1, 2)$, *ou seja,* $s(1, 1, 1) + t(-1, 1, 0) + u(-2, -1, -1) + v(-1, -1, -2) = (2, 4, 0)$, *ou seja,*

Precisamos resolver o sistema (3 equações, 4 variáveis):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim precisamos escalonar a matriz $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$. *Escalonando totalmente (verifique!) obtemos* $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right]$. *Assim tomando* v *como parâmetro livre, obtemos que* $(s,t,u,v) = (4v-6, 4-v, 2v-6, v)$. *Em termos de pontos do plano, como* $\Pi_1 = (1,-2,1) + s(1,1,1) + t(-1,1,0)$, *a interseção é a reta* $\{(1,-2,1) + (4v-6)(1,1,1) + (4-v)(-1,1,0) |\ v \in \mathbb{R}\}$. *Outra possibilidade é utilizar a equação de* $\Pi_2 = (3,2,1) + u(2,1,1) + v(1,1,2)$ *e dar como solução* $\{(3,2,1) + (2v-6)(2,1,1) + v(1,1,2) |\ v \in \mathbb{R}\}$. *Pode-se verificar que nos dois casos chegamos na mesma resposta:* $\{(-9,-4,-5) + v(5,3,4) |\ v \in \mathbb{R}\}$. ■

Exemplo 2.31 *Seja* $\Pi_1 = (-1,0,-2,1) + \langle(1,3,4,1),(2,-1,2,1)\rangle$. *Determine a interseção de* Π_1 *com*

(a) $\Pi_2 = \langle(2,1,1,2)\rangle$.

(b) $\Pi_3 = (1,0,2,1) + \langle(-1,-1,-1,-1),(0,3,1,1),(-1,0,1,2)\rangle$

(c) Π_4 *o conjunto dos pontos* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *tais que* $\begin{cases} x - 2y + w = 0 \\ 2x - y + z + w = 0 \end{cases}$ *(*Π_4 *é o conjunto-solução deste sistema).*

Solução: *Parametrizando,* $\Pi_1 = (-1,0,-2,1) + s(1,3,4,1) + t(2,-1,2,1)$ *com* $s,t \in \mathbb{R}$.

(a) Como $\Pi_2 = u(2,1,1,2)$ *(note que usamos parâmetro* u, *distinto de* s,t*!), queremos saber se existem* $s,t,u \in \mathbb{R}$ *tais que* $(-1,0,-2,1)+s(1,3,4,1)+t(2,-1,2,1) = u(2,1,1,2)$. *Precisamos (faça as contas!) resolver o sistema (4 equações, 3 variáveis)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Escalonando (verifique!) vamos concluir que o sistema ***não*** *possui solução. Concluímos que a interseção é vazia:* $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

(b) Como $\Pi_3 = (1,0,2,1)+u(-1,-1,-1,-1)+v(0,3,1,1)+x(-1,0,1,2)$ *(novamente utilizamos parâmetros distintos dos utilizados na parametrização de* Π_1*), precisamos resolver (verifique!) o sistema (4 equações, 5 variáveis)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo (utilizamos `linsolve` *no* `Maxima`*) obtemos que conjunto solução é uma reta. Parametrizando a reta por* $k \in \mathbb{R}$, $s = 2-4k, t = 11k-2, u = 4-19k, v = 4-14k, x = k$.

Substituindo na parametrização de Π_1 *(poderíamos substituir também na de* Π_3 *e obteríamos o mesmo resultado – verifique!) obtemos que a interseção é* $(-1,0,-2,1)+(2-4k)(1,3,4,1)+(11k-2)(2,-1,2,1) = (-3,\ 8,\ 2,\ 1)+k(18,\ -23,\ 6,\ 7)$ *para* $k \in \mathbb{R}$. *Assim* $\Pi_1 \cap \Pi_3 = (-3,\ 8,\ 2,\ 1) + \langle(18,\ -23,\ 6,\ 7)\rangle$.

(c) Como $x = -1+s+2t$, $y = 3s-t$, $z = -2+4s+2t$, $w = 1+s+t$, *e (verifique!)* $0 = x-2y+w = -4s+5t$ *e* $0 = 2x-y+z+w = -3+4s+8t$, *devemos resolver o sistema* $\begin{cases} -4s + 5t = 0 \\ -3 + 4s + 8t = 0 \end{cases}$. *Resolvendo obtemos a solução* $s_0 = \dfrac{15}{52}$ *e* $t_0 = \dfrac{3}{13}$. *Assim a interseção de* Π_1 *com* Π_4 *é o ponto* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *com* $x = -1+s_0+2t_0$, $y = 3s_0 - t_0$, $z = -2+4s_0+2t_0$, $w = 1+s_0+t_0$. ■

Exemplo 2.32 *Seja Y o conjunto dos pontos $(x, y, z, w, k) \in \mathbb{R}^5$ tais que* $\begin{cases} x - w + k = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ *e Z o conjunto dos pontos $(x, y, z, w, k) \in \mathbb{R}^5$ tais que* $\begin{cases} w - k = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. *Determine $Y \cap Z$.*

Solução: *Pontos na interseção vão satisfazer os dois sistemas* ***simultaneamente***. *Assim temos que resolver o sistema* $\begin{cases} x - w + k = 2 \\ x - y + z = 1 \\ w - k = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. *Escalonando obtemos que a solução é a reta $(x, y, z, w, k) = (2, -1, -2, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1, 1)$ para $t \in \mathbb{R}$.*
Logo $Y \cap Z = (2, -1, -2, 0, 0) + \langle(0, 0, 0, 1, 1)\rangle$. ∎

Exemplo 2.33 *Determine se é ponto, reta ou plano o conjunto solução de cada um dos sistemas abaixo, dados por sua matriz aumentada já escalonada:*

(a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$ *(b)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right]$ *(c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$

Solução: *(a) 5 variáveis e 3 equações: é um plano ($5 - 3 = 2$). (b) 4 variáveis e 3 equações: é uma reta ($4 - 3 = 1$). (c) 4 variáveis e 4 equações: é um ponto ($4 - 4 = 0$).* ∎

Exemplo 2.34 *Determine um sistema linear cujo conjunto solução seja igual:*
(a) ao plano $(1, 0, 2, 1) + \langle(2, -1, 2, 1), (1, 3, 4, 1)\rangle$.
(b) ao plano que passa por $(1, -1, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 0)$ e $(2, 1, 2, 3)$.
(c) à reta que passa por $(1, 2, 1, 2, 2)$ e $(2, 1, 3, 4, -1)$.

Solução: *(a) Temos que $(x, y, z, w) = (1, 0, 2, 1) + s(2, -1, 2, 1) + t(1, 3, 4, 1)$. Assim $x = 1 + 2s + t$ e $y = -s + 3t$. Resolvendo (para s, t) obtemos que $7s = -y + 3x - 3$ e $7t = 2y + x - 1$. Como $z = 2 + 2s + 4t$ e $w = 1 + s + t$, substituindo s, t como função de x, y obtemos o sistema* $\begin{cases} z = 2 + 2(-y + 3x - 3)/7 + 4(2y + x - 1)/7 \\ w = 1 + (-y + 3x - 3 + 2y + x - 1)/7 \end{cases}$

(b) O plano é (porque?) $(1, -1, 0, 2) + \langle(1, 1, 1, -2), (1, 2, 2, 1)\rangle$. Logo $(x, y, z, w) = (1, -1, 0, 2) + s(1, 1, 1, -2) + t(1, 2, 2, 1)$. Assim $x = 1 + s + t$ e $y = -1 + s + 2t$. Resolvendo (para s, t) obtemos que (com `Maxima: linsolve([x=1+s+t, y=-1+s+2*t],[s,t]);`*) $s = -y + 2x - 3$,$t = y - x + 2$. Como $z = s + 2t$ e $w = 2 - 2s + t$, substituindo s, t como função de x, y obtemos o sistema* $\begin{cases} z = -y + 2x - 3 + 2(y - x + 2) \\ w = 2 - 2(-y + 2x - 3) + y - x + 2 \end{cases}$

(c) A reta é (porque?) $(1, 2, 1, 2, 2) + \langle(1, -1, 2, 2, -3)\rangle$.
Logo $(x, y, z, w, k) = (1, 2, 1, 2, 2) + t(1, -1, 2, 2, -3)$. Assim $x = 1 + t$. Logo $t = x - 1$. Substituindo nas outras equações vamos obter o sistema $\begin{cases} y = 2 - 1(x - 1) \\ z = 1 + 2(x - 1) \\ w = 2 + 2(x - 1) \\ k = 2 - 3(x - 1) \end{cases}$. ∎

2.6 Produto Matriz-Vetor

Podemos ver uma matriz como um conjunto de vetores dispostos em colunas ou linhas. Assim, dado $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, pensando em colunas, A é composto de n vetores-coluna, cada vetor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Pensando em linhas, A é composto de m vetores-linha, cada vetor $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}.$$

Esta visão de matrizes é **muito** importante, entre outras razões, pois as operações de soma e produto de matrizes, incluindo o produto matriz-vetor, são mais fáceis (e naturais) de serem definidas utilizando este ponto de vista. Vamos utilizar bastante no livro este ponto de vista. Ela é generalizada pela visão de matriz em blocos apresentada na Seção 4.6 da p.117.

Definição 2.19 (produto matriz-vetor) *Seja* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *e* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$*. Definimos* $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$*, o produto da matriz* A *pelo vetor* $\mathbf{x}$*, por*

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i.$$

Portanto o produto matriz-vetor é a ***combinação linear das colunas*** *da matriz com coeficientes dados pelas entradas do vetor.*

Mais explicitamente, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, então

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_n}.$$

Assim

$$A\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array}} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_1 \\ \\ x_1 \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array}} & \begin{array}{c} x_2 \\ x_2 \\ \\ x_2 \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array}} \begin{array}{c} x_n \\ x_n \\ \\ x_n \end{array} \end{array}\right].$$

Isto pode ser representado pelo esquema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[\ \Bigg| \ \Bigg| \ \Bigg| \ \Bigg| \ \right] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j.$$

Lema 2.20 (linearidade do produto matriz-vetor) *Dados uma matriz A, vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e escalar k, $A(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + kA\mathbf{v}$.*

Prova: Basta escrever as entradas dos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e aplicar a definição do produto matriz-vetor (combinação linear das colunas). Deixamos detalhes para o leitor. ■

Vamos recordar o produto escalar entre dois vetores. Retomaremos este assunto mais adiante no texto (veja Definição 5.1 da p.137).

Definição 2.21 (produto escalar ou interno) *Dados $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$ denotamos o **produto escalar** (ou **interno**) entre eles por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, definido por*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

*Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ dizemos que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são **perpendiculares** (ou **ortogonais**) entre si.*

Exemplo 2.35 *Sejam $\mathbf{u} = (1, -2, -3, 4, 5), \mathbf{v} = (-1, 2, -1, 3, 0) \in \mathbb{R}^5$. Então*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-1) + (-2)(2) + (-3)(-1) + (4)(3) + (5)(0) = (-1) + (-4) + (3) + (12) = 10.$$

Lema 2.22 (interpretação do produto matriz-vetor) *Seja $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

*Portanto cada entrada do produto matriz-vetor é o **produto escalar entre cada linha** da matriz e $\mathbf{x}$.*

Prova: Basta explicitar em termos de coeficientes (a_{ij}) da matriz e do vetor $\mathbf{w} = (w_i)$. Ver Exemplo 4.4 da p.93. Deixamos detalhes para o leitor. ■

Isto pode ser representado pelo esquema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{x} \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rule{3em}{0.4pt} \\ \rule{3em}{0.4pt} \\ \rule{3em}{0.4pt} \end{bmatrix} \left[\ \Bigg| \ \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

2.7 Sistemas Homogêneos, Solução Geral e Particular

Definição 2.23 (Sistema homogêneo) *é um sistema cujo lado direito é todo igual a zero:*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Definição 2.24 (solução trivial) *O vetor nulo* $(0, 0, \ldots, 0)$ *é sempre solução do sistema homogêneo. Esta solução é chamada* ***solução trivial****.*

Num sistema homogêneo o lado direito de zeros é preservado por operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \star & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \star & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & 0 \end{array}\right].$$

Por isso a forma escalonada de um sistema homogêneo não possui linha da forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$. Isto implica que um sistema homogêneo **sempre** possui solução. Mais ainda, num sistema homogêneo com n variáveis, o número de pivôs p (equações efetivas) após o escalonamento determina se a solução é única:

(a) $p = n \quad \Rightarrow$ **solução única** (apenas a trivial);
(b) $p < n \quad \Rightarrow$ **infinitas soluções**, $(n - p)$ variáveis livres.

Definição 2.25 (solução geral e particular) *Considere o sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*.*
Chamamos de ***solução geral*** *seu conjunto-solução* S*.*
Chamamos de ***solução particular*** *um elemento* $\mathbf{v}_0 \in S$ *qualquer.*
Chamamos de ***solução do sistema homogêneo associado*** *o conjunto-solução do sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*.*

Definição 2.26 (núcleo ou kernel) *Dada uma matriz* A *chamamos de* ***núcleo*** *(ou* ***kernel****) de* A*, denotado por* $\mathrm{Nuc}(A)$ *(ou* $\ker(A)$*), o conjunto-solução do sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*.*

Exemplo 2.36 *Vamos ver a relação entre soluções de um sistema não-homogêneo e do sistema homogêneo associado. Considere o sistema não-homogêneo:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Este sistema foi resolvido no Exemplo 2.29 da p.50 e o conjunto-solução é $\{(0, -7, 0, 4) + r(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$*. Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o plano*

$$(0, -7, 0, 4) + \langle (1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0) \rangle .$$

Considere o sistema homogêneo associado:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo-o de forma análoga, obtemos o conjunto-solução $\{r(1,0,0,0)+s(0,-3,1,0) \mid r,s \in \mathbb{R}\}$*. Na linguagem do Capítulo 1, o conjunto-solução é o plano*

$$\langle (1,0,0,0),(0,-3,1,0)\rangle .$$

Note que o conjunto-solução do sistema não-homogêneo e do homogêneo associado diferem somente pelo vetor $(0,-7,0,4)$*, que é uma solução particular (dentre as infinitas soluções) do sistema não-homogêneo.*

Teorema 2.27 (solução geral de sistema) *Seja* $S \neq \emptyset$ *o conjunto-solução (solução geral) do sistema não-homogêneo* $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$*. Se* $\mathbf{v}_0 \in S$ *é solução particular qualquer, então* $S = \mathbf{v}_0 + Nuc(A)$*.*

Prova: Seja $V = \mathrm{Nuc}(A)$ o conjunto-solução do sistema homogêneo associado $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Queremos provar que $S=\mathbf{v}_0+V$. Para isto basta provar que $\mathbf{v}_0+V\subset S$ e que $S\subset \mathbf{v}_0+V$.

Vamos provar que $\mathbf{v}_0+V\subset S$. Dado $\mathbf{v}\in V$ qualquer, queremos provar que $\mathbf{v}_0+\mathbf{v}\in S$, ou seja, que $A(\mathbf{v}_0+\mathbf{v})=\mathbf{b}$. De fato, pelo Lema 2.20 da p.54 (linearidade do produto matriz vetor) $A(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}) = A\mathbf{v}_0 + A\mathbf{v} = \mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$.

Vamos provar que $S\subset \mathbf{w}_0+V$. Dado $\mathbf{w}\in S$ qualquer, queremos provar que $\mathbf{w}\in \mathbf{v}_0+V$. Novamente pelo Lema 2.20 da p.54 $A(\mathbf{w}-\mathbf{v}_0) = A\mathbf{w}-A\mathbf{v}_0=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Concluímos que $\mathbf{w}-\mathbf{v}_0\in V$ e portanto $\mathbf{w}\in\mathbf{v}_0+V$. ■

A **solução geral** (se não-vazia) do sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ é da forma $\mathbf{v}_0+\mathrm{Nuc}(A)$, soma de uma **solução particular** com uma **solução do sistema homogêneo associado** $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
Assim são equivalentes:
(a) o sistema possui solução única (igual a $\mathbf{v}_0$);
(b) o sistema homogêneo associado possui solução única (a trivial);
(c) $\mathrm{Nuc}(A)=\mathbf{0}$.

2.8 Interpretação de Sistemas em $\mathbb{R}^n$

Para interpretar precisamos da definição de hiperplano, que generaliza retas no $\mathbb{R}^2$ e planos no $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.28 (hiperplano) *Um* ***hiperplano*** *em* $\mathbb{R}^n$ *é a translação de um espaço gerado de dimensão* $n-1$*.*

Exemplo 2.37 *São hiperplanos:*

(a) Uma reta em $\mathbb{R}^2$ *(translação de um espaço gerado de dimensão* $2-1=1$*);*
(b) Um plano em $\mathbb{R}^3$ *(translação de um espaço gerado de dimensão* $3-1=2$*);*
(c) Em $\mathbb{R}^4$ *a translação de um espaço gerado de dimensão* $4-1=3$ *é um hiperplano.*

Lema 2.29 (geometria da equação do hiperplano) *Dado* $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$*, o conjunto-solução* H *da equação* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}=b\in\mathbb{R}$ *é um hiperplano.*

Mais precisamente, se V *é o conjunto dos vetores perpendiculares a* $\mathbf{u}$*, então existe* $\mathbf{v}_0\in H$ *tal que* $H=\mathbf{v}_0+V$*.*

Prova: Como $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, um dos $a_k \neq 0$. Logo é solução particular da equação $\mathbf{v}_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ com $x_k = \frac{b}{a_k}$ e $x_j = 0$ para $j \neq k$. Considere V o conjunto-solução do sistema homogêneo associado $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = 0$. Note que V é o conjunto dos vetores **perpendiculares**[1] a $\mathbf{u}$. Como este é um sistema escalonado com 1 equação não-nula e n variáveis, são $q = n-1$ variáveis livres. Pelo Teorema 2.18 da p.48 V é gerado por $q = n-1$ vetores LIs, ou seja, tem dimensão $n-1$. Pelo Teorema 2.27 da p.56, $H = \mathbf{v}_0 + V$, a translação de um espaço gerado de dimensão $n-1$. ∎

Exemplo 2.38 *Mostre que* $\{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 |\ x - 2y + 3z + w - u = 4\}$ *é um hiperplano.*
Solução: *Podemos escrever que* $x = 2y - 3z - w + u + 4$. *Introduzindo quatro parâmetros* $t_1 = y$, $t_2 = z$, $t_3 = w$ *e* $t_4 = u$, *obtemos que* $x = 2t_1 - 3t_2 - t_3 + t_4 + 4$. *Portanto* $(x, y, z, w, u) = (4, 0, 0, 0, 0) + t_1(2, 1, 0, 0, 0) + t_2(-3, 0, 1, 0, 0) + t_3(-1, 0, 0, 1, 0) + t_4(1, 0, 0, 0, 1)$. *Trata-se da translação de um espaço gerado de dimensão* 4 *em* $\mathbb{R}^5$, *isto é, um hiperplano em* $\mathbb{R}^5$. ∎

Vamos relacionar a operação de produto matriz-vetor com sistemas lineares. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & \cdots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & \cdots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & \cdots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Definimos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Sabemos da Definição 2.19 da p.53 do produto matriz-vetor que podemos escrever este sistema como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

As duas interpretações do **produto matriz-vetor** (combinação linear de colunas e produto escalar com linhas) implicarão em duas interpretações para o conjunto-solução do sistema linear (interseção de hiperplanos e $\mathbf{b} \in$ espaço gerado pelas colunas):

(a) (produto escalar com linhas $\Rightarrow$ **interseção de hiperplanos**)

Se $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$ (cada linha é um vetor), pelo Lema 2.22 da p.54 o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser rescrito como: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} & = & b_1 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{x} & = & b_m \end{array}\right.$. Cada equação $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{x} = b_j$ (supondo $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$) representa um hiperplano H_j (translação de um espaço gerado de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$). O conjunto-solução S do sistema linear é igual a interseção de todos estes hiperplanos: $S = \bigcap_{j=1}^{m} H_j$, Esta interpretação é **geométrica**. Fizemos isto em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ na Seção 2.3 da p.31: Em $\mathbb{R}^2$ interseção de retas (hiperplanos em $\mathbb{R}^2$); em $\mathbb{R}^3$ interseção de planos (hiperplanos em $\mathbb{R}^3$).

[1] Na linguagem da Seção 5.2 da p.140, $V = \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}$ (complemento ortogonal do espaço gerado por $\mathbf{u}$).

A intuição geométrica garante que, de forma geral, tanto a interseção de duas retas no plano quanto a interseção de três planos em $\mathbb{R}^3$ é um único ponto. Mas como visualizar que, de forma geral, a interseção de 4 hiperplanos em $\mathbb{R}^4$ é um único ponto? Para entender sistemas com muitas equações devemos nos libertar desta interpretação geométrica, que não pode ser experimentada em dimensão maior que 3, em favor da próxima interpretação.

(b) (combinação linear das colunas $\Rightarrow$ $\mathbf{b} \in$ **espaço gerado pelas colunas**)

Se $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ (cada coluna é um vetor), pela Definição 2.19 da p.53 o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser rescrito como: $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \sum_1^n x_j \mathbf{v}_j$.

O sistema terá solução se o vetor $\mathbf{b}$ for combinação linear dos vetores coluna da matriz, isto é, se $\mathbf{b} = \sum_1^n x_j \mathbf{v}_j$ para alguns $x_j \in \mathbb{R}$, ou seja, se $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Pode existir mais de uma combinação linear, isto é, o sistema pode ter mais de uma solução. Por outro lado, se $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, então o sistema não possuirá solução. Esta interpretação é **algébrica**. É a interpretação mais importante no curso de Álgebra Linear.

Podemos resumir da seguinte forma:

Sistema	$b = \sum x_j \mathbf{v}_j$? ou $b \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$? (interpretação **algébrica**)	$\bigcap H_j \neq \emptyset$? (interpretação **geométrica**)
sem solução	não	não
com solução única	sim (única)	sim (1 ponto)
com infinitas soluções	sim (infinitas)	sim (infinidade de pontos)

2.9 Exercícios de Sistemas Lineares

2.9.1 Exercícios de Fixação

Fix 2.1: Sem fazer contas,[2] determine se os sistemas abaixo possuem uma única, nenhuma ou infinitas soluções.

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 2x + 2y & = & 2 \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 2x - 3y & = & 2 \end{array} \right.$; (c) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 2x + 2y & = & 3 \end{array} \right.$

Fix 2.2: Considere as seguintes operações em um sistema linear de quatro equações:

(a) trocar duas equações; (b) descartar uma equação;
(c) substituir a terceira equação pela soma da primeira com a segunda;
(d) substituir a quarta equação pela sua soma com um múltiplo da segunda;
(e) multiplicar uma equação por -1; (f) multiplicar uma equação por 0.

As operações ____________ **nunca alteram** e as operações ____________ **podem alterar** o conjunto-solução do sistema.

Fix 2.3: O conjunto-solução do sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 3 \\ 3x + y & = & 1 \end{array} \right.$ (não resolva o sistema!) não se altera se acrescentarmos a equação $2x + 3y =$ ___.

[1] Versão 10.out.2012 09h

[2] Por "sem fazer contas", queremos dizer, neste e em outros exercícios, "sem fazer quaisquer contas que não possam ser feitas mentalmente com facilidade"

Fix 2.4: Complete as lacunas com: (*nenhuma; três; uma única; infinitas*). Seja ABC um triângulo equilátero. O sistema formado:

(a) pelas três retas que contém os lados de ABC possui __________ solução(ões);
(b) por duas destas retas possui __________ solução(ões);
(c) por uma destas retas possui __________ solução(ões).

Fix 2.5: Considere o paralelogramo $ABCD$ (não-degenerado: todos os pontos são distintos entre si) com lados paralelos AB e CD. Definimos quatro retas r, s, t, u de modo que: r passa por A e B, s passa por B e C, t passa por A e C, u passa por A e D. Determine a solução de cada um dos sistemas abaixo, onde representamos cada equação pela reta que ela determina:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} s \\ t \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{l} u \\ s \end{array} \right.$; (c) $\left\{ \begin{array}{l} r \\ s \\ t \end{array} \right.$; (d) $\left\{ \begin{array}{l} r \\ t \\ u \end{array} \right.$.

Fix 2.6: Um dado comum é um cubo cujas 6 faces apresentam os números de 1 até 6, distribuídos de forma que faces opostas somam sempre 7 (o 1 é oposto ao 6; o 2 oposto ao 5 e o 3 oposto ao 4). Vamos representar por "face 1" a equação do plano que contém a face com o número 1, por "face 2" a equação do plano que contém a face com o número 2, etc.

Determine o número de soluções de cada um dos sistemas abaixo:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{face2} \\ \text{face6} \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{face3} \\ \text{face4} \end{array} \right.$; (c) $\left\{ \begin{array}{l} \text{face1} \\ \text{face3} \\ \text{face5} \end{array} \right.$; (d) $\left\{ \begin{array}{l} \text{face3} \\ \text{face5} \\ \text{face6} \end{array} \right.$; (e) $\left\{ \begin{array}{l} \text{face1} \\ \text{face3} \\ \text{face6} \end{array} \right.$;

Fix 2.7: Sem fazer contas, determine, se possível, a condição em ξ para que os sistemas abaixo não possuam solução:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 3 \\ 2x-2y & = & \xi \end{array} \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x+y & = & 3 \\ 2x+y & = & \xi \end{array} \right.$.

Fix 2.8: Determine se é verdadeiro ou falso. Um sistema:

(a) têm infinitas soluções se durante o escalonamento uma linha ficar zerada;
(b) homogêneo sempre possui solução;
(c) não-homogêneo não pode possuir infinitas soluções;
(d) com 5 equações e 3 variáveis é sempre sem solução;
(e) com 3 equações e 5 variáveis possui infinitas soluções;
(f) homogêneo com 3 equações e 5 variáveis possui infinitas soluções;
(g) homogêneo com 5 equações e 9 variáveis possui pelo menos 4 variáveis livres;
(h) homogêneo com 9 equações e 9 variáveis possui sempre solução única.

Fix 2.9: Sem fazer contas, discuta a existência e a unicidade de solução dos sistemas abaixo. No caso de infinitas soluções, determine ainda o número de variáveis livres.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$; (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$; (c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$.

Fix 2.10: Suponha que $B\mathbf{v}_0 = \mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}$ é solução do sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se, e somente se $\mathbf{w} \in$__________($\{\mathbf{0}\}, Nuc(B), Im(B)$);
(b) se $\text{Nuc}(B)$ é uma reta, então $\mathbf{v}_0$ _____(*será, não será*) solução única do sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Fix 2.11: Em $\mathbb{R}^5$:

(a) o conjunto-solução de um sistema linear pode ser visto como a __________ (*união; interseção*) de __________ (*retas; planos; hiperplanos*);
(b) uma reta é um subespaço de dimensão ___;

(c) um plano é um subespaço de dimensão __;
(d) um hiperplano é um subespaço de dimensão __.

Fix 2.12: Considere o sistema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{x} \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Defina $H_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{x} = b_j\}$. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui solução:

(a) se, e somente se, $\bigcap_{j=1}^{m} H_j$ __$(=, \neq)$ $\emptyset$; (b) se, e somente se, $\mathbf{b}$ __$(\in, \notin)$ $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$;

Fix 2.13: Seja $S \neq \emptyset$ a solução geral de um sistema não-homogêneo com V o conjunto-solução do sistema homogêneo associado. Escolha uma opção. É sempre verdade que:
(A) $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in V$; (B) $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in S$;
(C) $V = \mathbf{v}_0 + S$ com $\mathbf{v}_0 \in S$; (D) $V = \mathbf{v}_0 + S$ com $\mathbf{v}_0 \in V$;

2.9.2 Problemas

Prob 2.1: Para cada um dos sistemas abaixo interprete cada equação como uma reta em $\mathbb{R}^2$, faça o gráfico e determine geometricamente o número de soluções:

(a) $\begin{cases} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 3x - y &= 6 \\ -6x + 2y &= 6 \end{cases}$;

Prob 2.2: Suponha que um sistema de três variáveis é composto de três equações. Em $\mathbb{R}^3$ cada equação representa um plano. Qual a posição relativa destes três plano quando o sistema:
(a) não possui solução? (b) possui exatamente uma solução? (c) possui infinitas soluções?

Prob 2.3: Para cada um dos itens abaixo, dê um exemplo de um sistema com as características pedidas ou explique por que tal exemplo não pode existir:
(a) (nº equações) = (nº variáveis), infinitas soluções;
(b) (nº equações) < (nº variáveis), solução única;
(c) (nº equações) < (nº variáveis), nenhuma solução;
(d) (nº equações) > (nº variáveis), infinitas soluções;

Prob 2.4: Determine a forma **totalmente escalonada** das matrizes abaixo:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Prob 2.5: Resolva cada um dos sistemas abaixo:

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$; (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$;

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$; (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

(e) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & -2 & 10 \\ -4 & -12 & -7 & 0 & -10 \\ 6 & 18 & 11 & 0 & 14 \end{array}\right]$; (f) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -4 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$.

Prob 2.6: Os sistemas abaixo são equivalentes (o segundo está totalmente escalonado):

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 1 & 2 & 41 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -24 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -17 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Parametrize os conjuntos-solução de ambos. Determine três soluções distintas para o primeiro sistema.

Prob 2.7: Resolva os sistemas lineares abaixo, parametrizando o conjunto solução:

(a) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x - y + 2z & = & 1 \\ -4x + 2y - 4z & = & -2 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcr} x + y - 2z & = & -2 \\ x - y & = & 0 \\ 2x + y - 3z & = & -3 \end{array}\right.$;

Prob 2.8: Determine os valores de m para que o sistema $\left\{\begin{array}{r} 2x + 8y + 2z = 3 \\ 4x + m^2y + mz = 6 \end{array}\right.$ possua:

(a) uma única variável livre; (b) duas variáveis livres.

Prob 2.9: Determine todos os valores possíveis para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & a \\ 5y + 6z & = & b \\ cz & = & d \end{array}\right.$ possua: (a) nenhuma solução; (b) infinitas soluções.

Prob 2.10: Considere os subconjuntos $V, W, Y, Z \subset \mathbb{R}^5$:
$V = (1,2,3,4,5) + \langle (1,0,1,0,1),\ (0,1,1,0,0),\ (0,0,0,1,1) \rangle$,
$W = \langle (1,0,0,0,0),\ (0,0,0,0,1) \rangle$,
Z os pontos $(x, y, z, w, k) \in \mathbb{R}^5$ tais que $\left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + w + k = 0 \end{array}\right.$ e
Y os pontos $(x, y, z, w, k) \in \mathbb{R}^5$ tais que $\left\{\begin{array}{l} x + w = 1 \\ z - x + y + w + k = -1 \end{array}\right.$. Determine:

(a) $V \cap W$; (b) $V \cap Z$; (c) $Y \cap Z$;
(d) um sistema linear cujo conjunto-solução é igual a V.

Prob 2.11: Considere a parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$ que passa por $(1,2)$, $(2,4)$ e $(3,8)$. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Prob 2.12: Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (produto matriz-vetor) de duas formas:

(a) como CL das colunas da matriz (usando como coeficientes as entradas do vetor);
(b) como produtos escalares das linhas da matriz pelo vetor.

Prob 2.13: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Note que a terceira coluna é a soma das duas primeiras. Sem escalonar, determine um vetor $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2.9.3 Extras

Ext 2.1: A equação geral do círculo em $\mathbb{R}^2$ com centro em (A, B) e raio r é dada por $(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2$.

(a) determine a, b, c em função de A, B, r para que a equação do círculo seja escrita como $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$;

[1]Versão 10.out.2012 09h

(b) Dados três pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ por onde passa o círculo, escreva o sistema que determina a, b, c.

(c) Determine a equação do círculo que passa em $(-4, 5), (-2, 7)$ e $(4, -3)$.

Ext 2.2: Seja $y = \beta_4 x^4 + \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ um polinômio que passa por 5 pontos dados: (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), e (a_5, b_5). Escreva a matriz ampliada (conhecida como matriz de Vandermonde) do sistema que determina as 5 variáveis $\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1, \beta_0$. Note que os pares (a_i, b_i) são dados, e serão coeficientes da matriz ampliada.

Ext 2.3: Determine:

(a) parametrização e equações cartesianas para a reta $r \subset \mathbb{R}^6$ que passa por $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0, 0, 0, 2)$.

(b) interseção de r (item (a)) com os pontos $(x, y, z, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$ tais que $\begin{cases} y - a + c = 1 \\ x + y + c = 0 \end{cases}$.

(c) interseção de r (item (a)) com os pontos $(x, y, z, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$ tais que $\{\ x + y + c = 0$.

(d) interseção de r (item (a)) com os pontos $(x, y, z, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$ tais que $\{\ x + y + z = 2$.

Ext 2.4: Para cada um dos sistemas abaixo interprete cada equação como uma reta em $\mathbb{R}^2$, faça o gráfico e determine geometricamente o número de soluções:

(a) $\begin{cases} 2x - 3y &= -1 \\ -6x + 9y &= 3 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x + 2y &= 6 \\ x - y &= 1 \\ x + 3y &= 6 \end{cases}$;

Ext 2.5: Para cada um dos itens abaixo, dê um exemplo de um sistema com as características pedidas ou explique por que tal exemplo não pode existir:

(a) (n° equações) = (n° variáveis), solução única;
(b) (n° equações) = (n° variáveis), nenhuma solução;
(c) (n° equações) < (n° variáveis), infinitas soluções;
(d) (n° equações) > (n° variáveis), solução única;
(e) (n° equações) > (n° variáveis), nenhuma solução;

Ext 2.6: Determine condições nos parâmetros (δ, β) para que o sistema associado possua uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução:

(a) $\begin{cases} \delta x + 2y &= 0 \\ 2x + \delta y &= 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + \delta y + z &= 1 \\ 2x - \delta y + 3z &= \delta \\ -x + 3y &= -2 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x + 2y + (\delta + 1)z &= 2 \\ y + \delta^2 z &= \delta + 1 \\ x + (1 - \delta)z &= 0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x - y + z &= -1 \\ x + y + (\beta - 1)z &= \delta \end{cases}$;

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \delta & \beta \end{array}\right)$; (f) $\begin{cases} x + y - z &= 2 \\ y + 5z &= 5 \\ x + 2y + \delta z &= 7 \end{cases}$.

Ext 2.7: Determine os valores de a tais que o sistema linear abaixo tenha solução.

$\begin{cases} x - y &= a \\ x + y + z &= a \\ 2x + z &= a \end{cases}$;

Ext 2.8: (a) Qual a condição em b_1, b_2 e b_3 para que o sistema abaixo possua solução?

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & b_1 \\ 2 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & -4 & 6 & b_3 \end{array}\right]$

(b) Sem refazer todas as contas, diga se o sistema possui solução com o lado direito $(3,\ 5,\ -1)$.

Ext 2.9: Considere o sistema $\left\{\begin{array}{rcr} x+3y & = & 1 \\ 2x+y & = & -3 \\ 2x+2y & = & 0 \end{array}\right.$. No ensino fundamental um método de resolução de sistema é resolver uma equação para uma variável e substituir a expressão nas outras equações. Isto é repetido até ficarmos com somente uma variável. Com isso, determinamos uma variável e, substituindo nas outras equações, determinamos as outras. Este método, além de mais longo que a eliminação de Gauss em termos de operações necessárias induz, frequentemente, ao erro.

(a) Resolva a primeira equação para x e substitua a expressão na segunda equação. Determine y;

(b) Novamente resolva a primeira equação para x, mas desta vez substitua a expressão na terceira equação. Determine este y;

(c) Qual é a solução correta para o sistema?

2.9.4 Desafios

Des 2.1: Seja A uma matriz que será escalonada. Determine para cada uma das três operações elementares uma matriz P tal que PA seja a matriz resultante após a aplicação da operação elementar;

Dica: Aplique operação elementar na matriz identidade.

Des 2.2: Prove que as operações elementares (de escalonamento de uma matriz) são reversíveis, isto é, mostre que se a matriz A é equivalente a B, então a matriz B é equivalente a matriz A.

Des 2.3: Um sistema linear com n equações e n variáveis tem a propriedade que os coeficientes, quando lidos linha por linha, da esquerda para direita, forma uma progressão geométrica. Prove que o sistema não tem solução única. Determine sua solução.

Des 2.4: Interprete o algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan da matriz A da seguinte forma: Dada uma matriz A existem matrizes P que permuta linhas, L triangular inferior e U triangular superior tais que $PA = LU$. Esta decomposição da matriz A é conhecida como **decomposição LU**.

Des 2.5: Considere um sistema de n equações em n variáveis. Prove a alternativa de Fredholm:

(a) ou o sistema possui solução única para todo lado direito;

(b) ou o sistema homogêneo associado tem solução não-trivial.

Capítulo 3

Espaço Vetorial

Neste capítulo começa a parte mais abstrata (para muitos alunos, a parte mais difícil) do curso de Álgebra Linear com a definição de espaços e subespaços vetoriais. O principal exemplo é o $\mathbb{R}^n$ e retas e planos passando pela origem, mas também são exemplos conjuntos de polinômios e funções. Revisitamos os conceitos apresentados no Capítulo 1 para espaços vetoriais quaisquer: vetor e operações; combinação linear, espaço gerado, LI/LD. Conceitos novos apresentados são: base e dimensão de espaço vetorial, núcleo e imagem de matriz.

3.1 Espaço e Subespaço Vetorial

Definição 3.1 (Um Espaço vetorial) *consiste de:*

- *um conjunto não-vazio V, cujos elementos são chamados de* ***vetores****;*
- *um conjunto numérico $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$ ou outros, mas nesse livro será sempre $\mathbb{R}$), cujos elementos são chamados de* ***escalares****;*
- *uma* ***soma vetorial****: operação que associa a cada dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ um vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$;*
- *uma* ***multiplicação por escalar (produto escalar-vetor)****: operação que associa a cada vetor $\mathbf{u} \in V$ e escalar $k \in \mathbb{K}$ um vetor $k\mathbf{u} \in V$.*

As operações satisfazem os ***axiomas*** *(detalhados na sequência) da soma vetorial; da multiplicação por escalar (produto escalar-vetor); e distributivos.*

Denotamos por $(V, +, \cdot)$ o ***espaço vetorial*** *sobre $\mathbb{K}$.*

[1]Versão 05.outubro.2012 03h

Axioma 3.2 (axiomas da soma vetorial)

- *comutativa:* $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ *para todo* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$;
- *associativa:* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ *para todo* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$;
- *elemento neutro da soma: Existe* $\mathbf{0}\in V$ *tal que* $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ *para todo* $\mathbf{u}\in V$;
- *inverso aditivo: Dado* $\mathbf{u}\in V$, *existe* $\mathbf{w}\in V$ *tal que* $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$. *Denotamos* $\mathbf{w}$, *o inverso aditivo de* $\mathbf{u}$, *por* $-\mathbf{u}$.

Observação 3.1 (unicidade do elemento neutro e do inverso aditivo) *Segue dos axiomas acima a* ***unicidade do elemento neutro****. Suponha que existam* $\mathbf{0}$ *e* $\widetilde{\mathbf{0}}$ *elementos neutros da soma. Como* $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ *(porque?), tomando* $\mathbf{u}=\widetilde{\mathbf{0}}$, *obtemos que* $\widetilde{\mathbf{0}}+\mathbf{0}=\widetilde{\mathbf{0}}$. *Por outro lado* $\mathbf{u}+\widetilde{\mathbf{0}}=\mathbf{u}$ *(porque?). Tomando* $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, *obtemos que* $\mathbf{0}+\widetilde{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$. *Como a soma é comutativa,* $\widetilde{\mathbf{0}}+\mathbf{0}=\widetilde{\mathbf{0}}=\mathbf{0}+\widetilde{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$. *Concluímos que* $\mathbf{0}=\widetilde{\mathbf{0}}$.
Convidamos o leitor a provar a unicidade do inverso aditivo. Comece supondo que $\mathbf{w}$ *e* $\widetilde{\mathbf{w}}$ *são inversos aditivos de* $\mathbf{u}$.

Axioma 3.3 (axiomas da multiplicação por escalar (produto escalar-vetor)) *Dados vetor* $\mathbf{u}\in V$ *e escalares* α,β:

- $(\alpha\beta)\mathbf{u}=\alpha(\beta\mathbf{u})$;
- *elemento neutro do produto:* $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Axioma 3.4 (axiomas distributivos) *Dados vetores* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ *e escalares* α,β:

- $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$;
- $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$.

Exemplo 3.1 *O espaço vetorial mais importante é o* $\mathbb{R}^n$ *munido das operações definidas no Capítulo 1. Num certo sentido (ver Lema 4.48 da p.121), todo espaço vetorial (de dimensão finita) sobre* $\mathbb{R}$ *(escalares) é equivalente ao* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2 *Outro exemplo é o* $\mathbb{C}^n$, *o conjunto das* n*-uplas de números complexos com operações definidas da forma natural. Veja Observação 7.3 da p.198.*

Exemplo 3.3 *Verifique que* $V=\{a\}$ *(conjunto unitário) com operações tendo como resultado sempre* a *é um espaço vetorial.*
Solução: *Dados* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{u}=\mathbf{v}=a$ *e* $\mathbf{u}+\mathbf{v}=a$ *e* $k\mathbf{u}=a$ *para todo escalar* k. *Note que o elemento neutro da soma e o inverso aditivo será* a. *Verifique as propriedades! Note que este espaço é equivalente a* $W=\{0\}$ *com* $0+0=0$ *e* $k\cdot 0=0$. ■

Exemplo 3.4 *Considere* $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$ *(o interior de um círculo de raio 1 com centro na origem). Considere em* V *as operações do* $\mathbb{R}^2$. *Verifique se* V *é espaço vetorial com estas operações.*
Solução: *Existe elemento neutro da soma, o vetor* $(0,0)\in V$, *existe inverso aditivo (dado* $u\in V, -u\in V$*). No entanto,* $\mathbf{u}=(0,1)\in V$ *mas* $2\mathbf{u}=(0,2)\notin V$. *Outro problema é que* $\mathbf{v}=(1,0)\in V$ *mas* $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,1)\notin V$ *(verifique!). Assim* V *não é espaço vetorial.* ■

Exemplo 3.5 *Verifique que o conjunto das matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}$ sobre os números reais (Definição 2.1 da p.30) munido da operação de soma de matrizes e multiplicação de escalar por matriz (Definição 1.4 da p.2) é um espaço vetorial. Quem é o elemento neutro da soma? Quem é o inverso aditivo?*

Solução: *A comutatividade e associatividade da soma de matrizes é decorrente da comutatividade e associatividade da soma de números reais. O elemento neutro é a matriz com todas entradas iguais a zero, a inversa aditiva de $A = (a_{ij})$ é a matriz $-A = (-a_{ij})$.* ■

Observação 3.2 *Identificamos (veja p.31) o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{M}_{n\times 1}$ pois as operações são idênticas. De fato vários livros representam vetores do $\mathbb{R}^n$ por uma matriz com uma coluna.*

Definição 3.5 (subespaço vetorial) *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Considere $W \subset V$. Dizemos que W é **subespaço vetorial** de V se $(W, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Note que as operações em W são herdadas das operações em V.*

Exemplo 3.6 *Todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços vetoriais:*
(a) V; *(b) $\{\mathbf{0}\}$ (dito subespaço trivial).*

Lema 3.6 (caracterização de subespaço) *$W \subset V$ é subespaço vetorial se:*

- *$\mathbf{0} \in W$,*
- *W é **fechado para a soma** vetorial, isto é, se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, e*
- *W é **fechado para a multiplicação** por escalar, isto é, se dados $\mathbf{u} \in W, k \in \mathbb{R}$, $k\mathbf{u} \in W$.*

Prova: Deixamos para o leitor. ■

Para se entender um conceito é importante, além dos exemplos, ver contra-exemplos. Assim estude nos exemplos abaixo, porque um conjunto não é subespaço vetorial.

Exemplo 3.7 (retas e planos) *Determine condições para que:*
(a) uma reta seja um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
(b) um plano seja um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Solução: *São subespaços vetoriais: retas e planos passando pela origem. Não são subespaços vetoriais: retas e planos que não passam pela origem. Note que o vetor $\mathbf{0}$ vai pertencer somente com esta condição. Verifique que caso passem pela origem serão fechados pela soma vetorial e multiplicação por escalar. Faça uns desenhos.* ■

Exemplo 3.8 *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:*
(a) $A = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 |\ \mathbf{v} = k(1, 2),\ k \in \mathbb{R}\}$;
(b) $B =$ uma reta que não passa por $(0, 0)$.
(c) $C =$ a união do eixo x com o eixo y (de forma geral, duas retas não coincidentes que passam pela origem).
(d) $D =$ ao primeiro e quarto quadrantes do $\mathbb{R}^2$.
(e) A parábola $E = \{(x, x^2)\ x \in \mathbb{R}\}$

Solução: *(a) A é subespaço vetorial. De fato:*

- $\mathbf{0} \in A$ *(tome $k = 0$).*

- *Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ com $\mathbf{v}_i = k_i(1,2)$. Logo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (k_1 + k_2)(1,2) \in A$*

- *Dado $m \in \mathbb{R}$, $m\mathbf{v}_1 = mk_1(1,2) \in A$.*

(b) B não é subespaço pois $\mathbf{0} \notin B$.

(c) C não é subespaço pois embora $\mathbf{0} \in C$ e seja fechado para multiplicação por escalar (porque?), $(1,0),(0,1) \in C$ mas $(1,0) + (0,1) \notin C$ (não é fechado para soma de vetores).

(d) D não é subespaço pois embora $\mathbf{0} \in D$ e seja fechado para multiplicação por escalar (porque?), $(2,1),(-1,-2) \in D$, $(2,1) + (-1,-2) = (1,-1) \notin D$ (porque?).

(e) E não é subespaço pois embora $\mathbf{0} \in E$ dado $(1,1),(2,4) \in E$, $(1,1) + (2,4) = (3,5) \notin E$ (não é fechado para soma). ■

Exemplo 3.9 *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:*

(a) $A = \{(x,y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}$. *(b) $B = \{(x,y,1),\ x,y \in \mathbb{R}\}$.*

Solução: *(a) A é subespaço vetorial. De fato:*

- $(0,0,0) \in A$ *(tome $x = y = 0$).*

- *Sejam $(x_1,y_1,0),(x_2,y_2,0) \in A$. Então $(x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ 0) \in A$.*

- *Sejam $(x,y,0) \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(x,y,0) = (\alpha x,\ \alpha y,\ 0) \in A$.*

(b) B não é subespaço vetorial. Note que B é a translação do item (a) pelo vetor $(0,0,1)$. De fato:

- $(0,0,0) \notin B$.

- *Sejam $(x_1,y_1,1),(x_2,y_2,1) \in B$. Então $(x_1,y_1,1)+(x_2,y_2,1) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ 2) \notin B$.*

- *Sejam $(x,y,1) \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha(x,y,1) = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha) \notin B$, se $\alpha \neq 1$.* ■

Exemplo 3.10 *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$:*

(a) $A = \{(2a - 3b,\ 0,\ a,\ b - a),\ a,b \in \mathbb{R}\}$. *(b) $B = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$.*

Solução: *(a) A é subespaço vetorial (um plano passando pela origem). De fato:*

- $\mathbf{0} \in A$ *(tome $a = b = 0$).*

- *Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A$, $\mathbf{v}_1 = (2a_1 - 3b_1, 0, a_1, b_1 - a_1)$, $\mathbf{v}_2 = (2a_2 - 3b_2, 0, a_2, b_2 - a_2)$. Logo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (2(a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2), 0, a_1 + a_2, a_2 + b_2 - (a_1 + a_2))$. Assim definida $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$ verifica-se que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in A$.*

- *Dado $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta\mathbf{v}_1 = (2\beta a_1 - 3\beta b_1,\ 0,\ \beta a_1,\ \beta b_1 - \beta a_1)$. Definindo $a = \beta a_1$ e $b = \beta b_1$ verifica-se que $\mathbf{v}_1 \in A$.*

(b) B é subespaço vetorial. Deixamos para o leitor verificar. Reveja a Definição 1.12 da p.14 (espaço gerado). ■

Exemplo 3.11 *Considere o espaço vetorial V e $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$. Verifique se é subespaço vetorial de V:*

(a) $A = \{\mathbf{v} \in V | \ \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. *(b)* $B = \{\mathbf{v} \in V | \ \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \mathbf{w}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Solução: *(a) A é subespaço vetorial (é uma reta paralela a $\mathbf{v}$ passando pela origem). De fato:*

- $\mathbf{0} \in A$ *(tome $\alpha = 0$).*
- *Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A$, $\mathbf{v}_1 = \alpha_1\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_2 = \alpha_2\mathbf{u}$. Logo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u} \in A$.*
- *Dado $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta\mathbf{v}_1 = (\beta\alpha_1)\mathbf{u}_1 \in A$.*

(b) $\mathbf{0} \in B$ se, e somente se, existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_0\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{w} = -\alpha_0\mathbf{u}$, ou seja se $\mathbf{w}$ é múltiplo de $\mathbf{u}$. Neste caso $\alpha\mathbf{u} + \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} - \alpha_0\mathbf{u} = (\alpha - \alpha_0)\mathbf{u}$. Assim todos os vetores são múltiplos de $\mathbf{u}$ e $A = B$ é um subespaço vetorial. Caso contrário (se $\mathbf{w}$ não é múltiplo de $\mathbf{u}$), como $\mathbf{0} \notin B$, B não é subespaço vetorial. ■

Exemplo 3.12 (espaço vetorial e matrizes) *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$.

Determine se é subespaço vetorial:

(a) $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$, *o conjunto-solução do sistema linear homogêneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(b) $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^n$, *com $\mathbf{b} \neq 0$, o conjunto-solução do sistema linear não-homogêneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

(c) $Z = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \ \mathbf{y} = A\mathbf{x}; \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$.

Solução: *(a) V é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$. De fato é claro que $\mathbf{0} \in V$ pois é $\mathbf{0}$ é solução do sistema homogêneo. Além disso, pela linearidade do produto matriz-vetor (Lema 2.20 da p.54), se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções de um sistema homogêneo, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $k\mathbf{u}$ também são para todo $k \in \mathbb{R}$. V será definido (veja Definição 3.7) como* ***núcleo*** *da matriz A.*

(b) W não é subespaço vetorial pois é claro que $\mathbf{0} \notin W$ (porque?)

(c) Pelas interpretações do produto matriz-vetor (veja página 53), $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i$.

Logo $Z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i | \ x_i \in \mathbb{R} \right\}$, *que é igual ao espaço gerado pelas colunas da matriz, isto é, $Z = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Logo Z é subespaço vetorial. Z será definido (veja Definição 3.7) como* ***imagem*** *da matriz A.* ■

Estes exemplos apresentam dois subespaços associados a uma matriz que são **muito** importantes para a teoria:

Definição 3.7 (núcleo e imagem de matriz) *Dada uma matriz A, chamamos de* ***núcleo*** *da matriz A, denotado por $\mathrm{Nuc}(A)$, o subespaço-solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e de* ***imagem*** *da matriz, denotado por $\mathrm{Im}(A)$, o subespaço vetorial gerado pelas colunas da matriz A.*

Observação 3.3 *Veja na Observação 4.9 da p.102 como calcular o núcleo e imagem de uma matriz.*

Observação 3.4 (núcleo e imagem e sistemas lineares) *O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução se, e somente se, $\mathbf{b} \in Im(A)$ (veja p.58: $\mathbf{b} \in$ espaço gerado pelas colunas). Pelo Teorema 2.27 da p.56, caso um sistema possua solução ela é única se, e somente se, $Nuc(A) = \{\mathbf{0}\}$.*

Como se comportam subespaços vetoriais com relação as operações de união e interseção de conjuntos?

Exemplo 3.13 *Considere H e K dois planos em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem com $H \neq K$. Determine se são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:*

(a) $H \cap K$.   (b) $H \cup K$.

Solução: *(a) A interseção é pois será uma reta passando pela origem.*

(b) Não será pois embora $\mathbf{0}$ pertença a união, a soma de vetores não-nulos, um de cada plano, não pertencerá a nenhum dos dois. ∎

Exemplo 3.14 (interseção de subespaços vetoriais é subespaço) *Considere H e K subespaços vetoriais de V. Determine se $H \cap K$ é subespaço vetorial de V.*

Solução: *A interseção será subespaço pois $\mathbf{0}$ pertence aos dois, e portanto a interseção. Além disso dado $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \cap K$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ (pois H é subespaço) e $\in K$ (pois K é subespaço). Logo $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H \cap K$. De forma análoga a interseção é fechada para multiplicação por escalar.* ∎

Definição 3.8 (soma de subespaços) *Definimos a **soma de subespaços vetoriais** H e K por*

$$H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k} \mid \mathbf{h} \in H, \mathbf{k} \in K\}.$$

Exemplo 3.15 (soma de subespaços é subespaço) *Dados H e K subespaços vetoriais de V, mostre que $H + K$ é subespaço vetorial.*

Solução: *Tomando $\mathbf{h} = \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} + \mathbf{k} = \mathbf{0} \in H + K$. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H + K$, $\mathbf{u} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{k}_1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{h}_2 + \mathbf{k}_2$ com $\mathbf{h}_i \in H$ e $\mathbf{k}_i \in K$ com $i = 1, 2$. Assim $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Como $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 \in H$ e $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \in K$, a soma pertence a $H + K$. De forma análoga prova-se que é fechado para multiplicação por escalar.* ∎

Exemplo 3.16 *Considere os vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^3$ não-colineares, um plano Π passando pela origem que não contém estes vetores e um vetor não-nulo $\mathbf{w} \in \Pi$. Determine (geometricamente) a soma de:*

(a) $\langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle$;   (b) $\langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w} \rangle$;   (c) $\langle \mathbf{u} \rangle + \Pi$;   (d) $\langle \mathbf{w} \rangle + \Pi$;   (e) $\langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle$;

Solução: *(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, que é diferente de Π. (c) $\mathbb{R}^3$ pois $\mathbf{u} \notin \Pi$. (d) Π pois $\mathbf{w} \in \Pi$. (e) $\langle \mathbf{u} \rangle$.* ∎

3.2 Combinação Linear e Espaço Gerado

Recomendamos que o leitor reveja os conceitos de combinação linear (Definição 1.11 da p.13) e espaço gerado (Definição 1.12 da p.14) ambas do Capítulo 1 no contexto do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Reveja os exemplos. As mesmas definições valem para qualquer espaço vetorial.

Exemplo 3.17 *Determine se* $(2,1,7)$ *é combinação linear de* $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ *e* $(7,8,7)$.
Solução: *Temos que verificar se existem* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ *tais que* $\alpha(1,2,3)+\beta(4,5,6)+\gamma(7,8,7) = ((\alpha+4\beta+7\gamma),(2\alpha+5\beta+8\gamma),(3\alpha+6\beta+7\gamma)) = (2,1,7)$.

Precisamos resolver o sistema: $\begin{cases} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 2 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 1 \\ 3\alpha & +6\beta & +7\gamma & = & 7 \end{cases}$.

Escalonando $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 \end{array}\right]$.

Como o sistema possui solução (poderiam ser infinitas soluções, mas é única), obtemos que é combinação linear e que $\alpha = -5.5, \beta = 8, \gamma = -3.5$. ■

O exemplo anterior mostra a conexão entre combinações lineares e sistemas. Para saber se um vetor é combinação linear de outros vetores (ou não) precisamos resolver um sistema linear.

Lema 3.9 (conjunto gerado é subespaço) $H = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ *é um subespaço vetorial.*

Prova: Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{p} w_i \mathbf{v}_i$. Então tomando $u_i = 0$ concluímos que $\mathbf{0} \in H$. A soma $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{p} (u_i + w_i)\mathbf{v}_i \in H$. Finalmente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} (\alpha u_i)\mathbf{v}_i \in H$. ■

Exemplo 3.18 *Mostre que:* $\langle (1,1,0),(0,1,0) \rangle \neq \mathbb{R}^2$.
Solução: *Observe que* $(0,0,1)$ *não pertence ao espaço gerado pois deveríamos ter* $(0,0,1) = a(1,1,0) + b(0,1,0)$ *que gera um sistema impossível* ($1 = 0!$). ■

Exemplo 3.19 *Considere* V *o plano* $3x - 2y + z = 0$ *e* W *o plano* $x - 3y - 2z = 0$ *em* $\mathbb{R}^3$. *Determine o conjunto gerador de* $V \cap W$.
Solução: *Como os vetores* (x,y,z) *pertencem a interseção devem satisfazer as duas equações. Basta resolver o sistema* $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$. *Obtemos* $(x,y,z) = t(-1,-1,1)$. *Logo* $V \cap W = \langle (-1,-1,1) \rangle$. ■

3.3 Dependência e Independência Linear

Recomendamos que o leitor estude o Lema 1.14 da p.15 que caracteriza quando um vetor é redundante numa lista de vetores e a definição de vetores LIs e LDs (Definição 1.15 da p.16), ambas do Capítulo 1 no contexto do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Reveja os exemplos. As mesmas definições valem para qualquer espaço vetorial.

Apresentamos convenções (pouco interessantes) sobre o conjunto vazio.

Convenção 3.10 (conjunto vazio) *Convencionamos que:*
(a) $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\}$, *isto é, o espaço gerado por um conjunto vazio de vetores é o subespaço trivial* $\{\mathbf{0}\}$.
(b) O conjunto vazio é LI.

Observação 3.5 (Matrizes e Vetores LIs) *Considere os vetores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *em* $\mathbb{R}^m$. *Pela Definição 1.15 da p.16 eles serão Linearmente Independentes (LIs) se, e somente se,* $\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = 0$ *implicar que* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{0}$. *Assim definindo* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, *serão LIs se, e somente se, o conjunto solução do sistema homogêneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *for trivial, isto é, igual a* $\{\mathbf{0}\}$. *Portanto para verificar se vetores em* $\mathbb{R}^m$ *são LIs devemos resolver um sistema linear.*

Exemplo 3.20 *Determine se são LIs ou LDs:*

(a) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(7, 8, 7)$. *(b)* $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(7, 8, 9)$.

Solução: *(a) Temos que verificar se existem* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *não-nulos tais que* $\alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 5, 6) + \gamma(7, 8, 7) = ((\alpha + 4\beta + 7\gamma), (2\alpha + 5\beta + 8\gamma), (3\alpha + 6\beta + 7\gamma)) = (0, 0, 0)$.

Existe solução não-trivial para o sistema: $\left\{ \begin{array}{rrrcl} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +6\beta & +7\gamma & = & 0 \end{array} \right.$ *?*

Escalonando parcialmente, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$.

Concluímos que o sistema possui somente solução trivial. Portanto são LIs.

(b) Temos que verificar se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *não-nulos tais que* $\alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 5, 6) + \gamma(7, 8, 9) = ((\alpha + 4\beta + 7\gamma), (2\alpha + 5\beta + 8\gamma), (3\alpha + 6\beta + 9\gamma)) = (0, 0, 0)$.

Precisamos resolver o sistema: $\left\{ \begin{array}{rrrcl} 1\alpha & +4\beta & +7\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +5\beta & +8\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +6\beta & +9\gamma & = & 0 \end{array} \right.$.

Escalonando, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

Concluímos que o sistema possui infinitas soluções. Portanto existe solução não-trivial do sistema e portanto são LDs. ■

Observação 3.6 *Para determinar se é LI ou LD basta escalonar matriz com vetores em cada* ***coluna*** *(veja os dois exemplos anteriores novamente).* ***Não*** *precisa ser forma totalmente escalonada. Isto segue do Corolário 2.16 da p.46, pois precisamos saber somente se o sistema homogêneo possui solução única ou infinitas soluções,* ***não*** *precisamos calcular a solução.*

Surpreendentemente (ver Lema 3.15 da p.75), também podemos determinar se é LI ou LD escalonando matriz com vetores em cada ***linha****, que de forma geral é um método mais eficiente pois o número de linhas (vetores neste caso) será menor que o número de colunas (dimensão do espaço ambiente).*

3.4 Base e Dimensão

Considere os vetores do $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Dado $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, a única forma de escrever $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ é se $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (a_1, a_2)$, ou seja, se $a_i = v_i$ para $i = 1, 2$. Concluímos que $\mathbf{v}$ se escreve como **combinação linear única** de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Por contraste, dados $\mathbf{w}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{w}_2 = (-1, -1)$ o vetor $\mathbf{v} = (3,3)$ pode ser escrito como (entre infinitas outras possibilidades): $\mathbf{v} = 3\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v} = 0\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}_1 - 1\mathbf{w}_2$, $\ldots$, etc. Isto motiva a definição abaixo.

Definição 3.11 (base) *Um* ***conjunto ordenado***[1] *S é* ***base*** *se todo vetor se expressa de forma* ***única*** *como combinação linear dos elementos de S.*

Exemplo 3.21 *Determine se o conjunto ordenado:*

(a) $\{(0,-1),(1,0),(0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$;

(b) $\alpha = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^4$;

(c) $\beta = \{(1,1,\ldots,1),\ (0,1,\ldots,1),\ \ldots,\ (0,\ldots,0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^n$.

Solução: *(a) Não é base pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + (b+\lambda)(0,1) + \lambda(0,-1)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Ou seja, todo vetor do $\mathbb{R}^2$ pode ser expresso porém de diversas formas distintas. Por exemplo $(3,2) = 3(1,0) + 2(0,1) + 0(0,-1) = 3(1,0) + 1(0,1) - 1(0,-1)$.*

(b) Dado $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{R}^4$, queremos escrever $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3,v_4) = a_1(1,1,1,1) + a_2(0,1,1,1) + a_3(0,0,1,1) + a_4(0,0,0,1)$, combinação linear do conjunto ordenado α. Vamos obter o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = v_1 \\ a_1 + a_2 = v_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = v_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = v_4 \end{cases}$$

Este sistema é triangular superior e pode ser facilmente resolvido. Possui solução ***única****: $a_1 = v_1, a_2 = v_2 - v_1, a_3 = v_3 - v_2, a_4 = v_4 - v_3$. Como a solução é única (sistema triangular superior), α é base.*

(c) Denotando $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, dado um vetor $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = \sum \alpha_i \mathbf{b_i} = (\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \ldots)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3 \\ \qquad\vdots \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\ \alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2 \\ \qquad\vdots \end{cases}.$$

Como o sistema possui solução única (triangular superior), β é base. ■

Vamos generalizar os comentários que fizemos antes da Definição 3.11. Uma notação muito utilizada é definir os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0,0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$. Dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se, e somente se, $\alpha_i = v_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Concluímos que todo vetor do $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como **combinação linear única** dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, formando uma base do $\mathbb{R}^n$.

[1] Ao invés de **conjunto ordenado**, o termo mais correto seria uma n-upla de vetores ou uma lista. Num conjunto não importa ordem nem termos repetidos; numa n-upla (ou lista) podemos ter termos repetidos e a ordem importa. Assim, embora os conjuntos $\{(1,1),(1,1)\}$ e $\{(1,1)\}$ sejam idênticos, considerados como **conjuntos ordenados** são distintos pois um possui 1 elemento e outro 2 elementos. Além disso um é LI o outro é LD. Neste texto, e em muitos textos de álgebra linear, quando se diz que um **conjunto** é base está subentendido que trata-se de um **conjunto ordenado**.

Definição 3.12 (base canônica) *O conjunto ordenado $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é chamado de **base canônica do** $\mathbb{R}^n$.*

Na prática, o Lema abaixo é utilizado para garantir que um conjunto ordenado é base.

Lema 3.13 (caracterização de base) *O conjunto ordenado $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de elementos do espaço vetorial V é base do subespaço vetorial $H \subset V$ se, e só se:*
(a) β gera H, isto é, $H = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$;
(b) β é LI.

Prova: **Se:** Seja β base de H. Da definição de base, segue que β gera H. Da unicidade de representação de $\mathbf{0}$, segue que β é LI.

Só se: Seja β LI e gerador de H. Todo vetor $\mathbf{v} \in H$ pode ser escrito como CL dos vetores de β. Vamos mostrar que esta representação é única. Suponha $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \mathbf{v}_i$. Então, $\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \xi_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Como β é LI, $\alpha_i - \xi_i = 0$ para $i = 0, \ldots, n$. Portanto $\alpha_i = \xi_i$ para $i = 0, \ldots, n$ e a representação de $\mathbf{v}$ é única. ∎

Observação 3.7 *Pelo Lema 3.13, para que um conjunto seja base ele deve ser:*
(a) grande o suficiente para gerar todos os vetores;
(b) pequeno o suficiente para ser LI.

Exemplo 3.22 *Verifique se é base do $\mathbb{R}^2$:*
(a) $\{(1,0), (1,1), (0,1)\}$; *(b) $\{(1,0), (1,1)\}$.*

Solução: *(a) Gera o $\mathbb{R}^2$ pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + 0(1,1) + b(0,1)$, mas não é base de $\mathbb{R}^2$ pois não é conjunto LI: $(1,1) = (1,0) + (0,1)$. Assim, por exemplo, $(1,1)$ NÃO se expressa de forma única: $(1,1) = 1(1,0) + 0(1,1) + 1(0,1) = 0(1,0) + 1(1,1) + 0(0,1)$.*

(b) Gera o $\mathbb{R}^2$ pois dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a(1,0) + (b-a)(1,1)$. São LIs (um não é múltiplo do outro). Logo é base do $\mathbb{R}^2$. ∎

Definição 3.14 (dimensão) *A **dimensão** de um (sub)espaço vetorial é o número de vetores em (qualquer) uma de suas bases, caso seja finito, ou é dito de dimensão infinita.*

Note que o mesmo (sub)espaço vetorial pode ser gerado por diversos conjuntos ordenados de vetores. Para que esta definição faça sentido temos que provar que o número de vetores será **sempre o mesmo** independente da base. Remetemos o leitor para Seção 3.6 da p.83 para a demonstração deste importante (e clássico) resultado.

Provamos no Corolário 3.29 da p.85 que em um espaço de dimensão n, dado $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ (um conjunto ordenado de vetores com p elementos), se:

- $p > n$, então β não é LI (e não é base);
- $p < n$, então β não é gerador (e não é base); e
- $p = n$, então β é gerador se e só se é LI, se e só se é base.

Dado um espaço gerado por uma lista de vetores do $\mathbb{R}^n$ como extrair uma base?

Como operações elementares não alteram o espaço gerado, isto pode ser feito escalonando uma matriz que tem estes vetores como **linhas**.

Lema 3.15 (escalonamento e espaço gerado) *Seja* $A = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \cdots\cdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_m \rightarrow \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{v}_1 \rightarrow \\ \cdots\cdots \\ \leftarrow \mathbf{v}_k \rightarrow \end{bmatrix}$ *matrizes equivalentes, isto é,* B *é obtida através de operações elementares aplicadas em* A*. Então os espaços gerados* $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$ *e* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ *são iguais.*

Além disso, se B *estiver escalonada (não precisa ser totalmente escalonada) e após descarte das linhas nulas, então* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *é LI.*

Prova: Basta verificar que cada uma das operações elementares preserva o espaço gerado:

(a) Trocar a ordem das linhas claramente não altera;

(b) Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo. Vamos provar quando o espaço é gerado por um único vetor. Suponha $k \neq 0$, vamos mostrar que $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle k\mathbf{v} \rangle$. De fato, seja $\mathbf{w} = a\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = a/k(k\mathbf{v}) \in \langle k\mathbf{v} \rangle$. Por outro lado, se $\mathbf{w} = b\mathbf{v} \in \langle k\mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = bk(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{v} \rangle$.

(c) Substituir linha por sua soma com múltiplo de outra. Podemos verificar no caso de espaço gerado por dois vetores: Vamos provar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Seja $\mathbf{w} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Então $\mathbf{w} = c(\mathbf{u} + a\mathbf{v}) + (d - ac)\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Por outro lado se $\mathbf{w} = c(\mathbf{u} + a\mathbf{v}) + d\mathbf{v}$, então, $\mathbf{w} = c\mathbf{u} + (ac + d)\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

(d) Descartar linhas só de zeros preserva pois $\mathbf{0}$ é sempre um vetor LD.

Se a matriz B estiver escalonada, então qualquer combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ resultará num sistema tipo triangular inferior (similar a forma escalonada, que é tipo triangular superior), cuja única solução é a trivial. ■

Exemplo 3.23 *Determine uma base para o espaço gerado por*

$$W = \langle (1,2,1,-1),\ (2,1,0,2),\ (3,3,1,1),\ (4,5,2,0) \rangle .$$

Solução: *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. *Escalonando obtemos* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}$ *(duas linhas foram descartados por conter somente zeros). Assim* $W = \langle (1,2,1,-1), (0,1,2/3,-4/3) \rangle$. *É claro que formam base pois a matriz está escalonada.* ■

Observação 3.8 (Software Algébrico) *Vamos calcular com o* `Maxima` *este exemplo. Entramos a matriz onde cada coluna é um vetor que gera* W: `M: matrix( [1,2,1,-1], [2,1,0,2], [3,3,1,1], [4,5,2,0]);`. *Calculamos o espaço gerado pelas colunas com o comando* `columnspace(M)`.

Exemplo 3.24 *Um subespaço do* $\mathbb{R}^n$ *pode ser determinado por:*

(a) espaço gerado, $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, *por exemplo,* $V = \langle (1,0,1), (1,2,3) \rangle$;

(b) equações cartesianas (conjunto-solução de sistema homogêneo), $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n |\ A\mathbf{w} = \mathbf{0}\}$, *por exemplo,* $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$;

(c) parametrização, por exemplo, $Z = \{(2s + 3t, s + t, s - t) \in \mathbb{R}^3 |\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Explique como converter entre estas três formas de representar um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ *e como determinar a interseção entre subespaços representados por estas formas.*

Solução: *Reveja a Seção 1.2 da p.5 onde explicamos como converter entre equações cartesianas e parametrização de retas e planos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Para realizar a conversão:*

— de (a) para (b): Veja Exemplo 2.34 da p.52.

— de (b) para (a) ou (c): Resolva o sistema linear (Teorema 2.18 da p.48).

— de (c) para (a): coloque parâmetros em evidência. No exemplo $Z = s(2,1,1) + t(3,1,-1)$. Assim $Z = \langle (2,1,1), (3,1,-1) \rangle$.

— de (a) para (c): introduza um parâmetro para cada vetor do espaço gerado. No exemplo $V = s(1,0,1) + t(1,2,3) = (s+t, 2t, s+3t)$.

— (b) para (c) ou (c) para (b): passe por (a) e use itens anteriores.

Para determinar a interseção entre 2 subespaços descritos:

— ambos por parametrização ou um por parametrização e outro por equações cartesianas: Veja Exemplo 2.31 da p.51.

— ambos por equações cartesianas: Veja Exemplo 2.32 da p.52. ■

Exemplo 3.25 (soma e interseção de subespaço gerado) *Se $W_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ e $W_2 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$ explique como:*

Calcular: (a) $W_1 + W_2$; (b) $W_1 \cap W_2$. Verificar se: (c) $W_1 \subset W_2$; (d) $W_1 = W_2$.

Solução: *(a) Junte as bases de W_1 e W_2 numa única matriz (cada linha um vetor) e escalone (não precisa ser escalonamento total). O que resultar será base de $W_1 + W_2$. (b) Determine sistemas homogêneos cujo conjunto-solução sejam W_1 e W_2. Junte as equações dos sistemas num sistema ampliado e resolva-o. (c) Faça o mesmo que em (a) colocando nas primeiras linhas da matriz os vetores geradores de W_2 e depois de W_1. Escalone. Se as linhas relativas a W_1* ***todas*** *zerarem concluímos que $W_1 \subset W_2$. (d) Verifique que $W_1 \cap W_2$ e $W_2 \cap W_1$ utilizando (c).* ■

3.5 Polinômios e Funções como Vetores

Espaços vetoriais de funções são utilizados (entre inúmeras aplicações) para:

(a) aproximar uma função utilizando polinômios;

(b) criar e analisar métodos numéricos que aproximam derivada ou integral;

(c) determinar soluções de equações diferenciais.

3.5.1 Definição e Exemplos

Definição 3.16 (espaço vetorial de polinômios de grau máximo n) *Seja $\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n;\ a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau até n. Definimos em $\mathcal{P}_n$ as operações:*

(a) soma vetorial: $$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\, x^i;$$

(b) multiplicação por escalar: $$\alpha \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i)\, x^i.$$

Pode-se verificar que $\mathcal{P}_n$ munido destas operações é um espaço vetorial.

Exemplo 3.26 *Determine o elemento neutro da soma de $\mathcal{P}_3$. Determine o inverso aditivo de $q(x) = 3x^3 - 2x + 1$.*

Solução: *O elemento neutro é $p(x) = 0$ (verifique). O inverso aditivo de q é $p(x) = -3x^3 + 2x - 1$ pois $p(x) + q(x) = \mathbf{0}$.* ■

Definição 3.17 (espaço vetorial dos polinômios) *Definimos por $\mathcal{P}$ a união de todos os conjuntos $\mathcal{P}_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim $\mathcal{P}$ inclui TODOS os polinômios, de todos os graus possíveis e forma um espaço vetorial se for munido das operações de soma de polinômios e multiplicação por escalar.*

Definição 3.18 (espaço vetorial de funções) *Dado conjunto $I \subset \mathbb{R}$ (não-vazio) qualquer, denotamos $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ o conjunto das funções de I em $\mathbb{R}$. Dadas duas funções $f, g \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos em $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ as operações:*

(a) soma vetorial: $f + g$ por $f(x) + g(x)$ para todo $x \in I$; e

(b) multiplicação por escalar: $\lambda \cdot f$ por $\lambda \cdot f(x)$ para todo $x \in I$.

Pode-se verificar que $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ munido destas operações é um espaço vetorial.

Exemplo 3.27 *Determine o elemento neutro da soma de $\mathcal{F}([0,2];\mathbb{R})$. Determine o inverso aditivo de $g(x) = \operatorname{sen}(3 - x)$.*

Solução: *O elemento neutro é a função $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,2]$. O inverso aditivo de $g(x)$ é $h(x) = -\operatorname{sen}(3 - x)$ pois $g + h = \mathbf{0}$.* ∎

Observação 3.9 *Note que o sinal "+" (mais) em "$f + g$" e "$f(x) + g(x)$" (bem como de "$\cdot$") possui significado distinto em cada expressão: soma de vetores, num caso, e de soma de números reais (escalares) no outro.*

Exemplo 3.28 *Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{P}_3$:*

(a) $\{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3 | \ \mathbf{p}(1) = 0\}$. (b) $\{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3 | \ \mathbf{p}(2) = 5\}$. (c) $\{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3 | \ \mathbf{p}(3) \geq 0\}$.

Solução: *(a) é subespaço. De fato: $\mathbf{0}$ pertence pois $\mathbf{0}(1) = 0$; Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, como $\mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(1) = 0$, então $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) = \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1) = 0$; Dados $\mathbf{p}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, como $\mathbf{p}(1) = 0$, então $(\alpha\mathbf{p})(1) = \alpha(\mathbf{p}(1)) = \alpha(0) = 0$.*

(b) Não é subespaço pois $\mathbf{0}(2) = 0 \neq 5$. Além disso dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, como $\mathbf{p}(2) = \mathbf{q}(2) = 5$, então $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(2) = \mathbf{p}(2) + \mathbf{q}(2) = 10 \neq 0$.

(c) De fato: $\mathbf{0}$ pertence pois $\mathbf{0}(3) \geq 0$. Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, como $\mathbf{p}(3) \geq 0$ e $\mathbf{q}(3) \geq 0$, então $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(3) = \mathbf{p}(3) + \mathbf{q}(3) \geq 0$; Dados $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{p}(3) > 0$ e $\alpha = -1$, $(\alpha\mathbf{p})(3) = -\mathbf{p}(3) < 0$ e não pertence ao conjunto. Logo não é subespaço vetorial. ∎

Observação 3.10 *Todo polinômio de $\mathcal{P}_n$ pode ser pensado como um elemento (função) de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ com $I \subset \mathbb{R}$. Neste sentido, $\mathcal{P}_n$ é subespaço de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$. Este exemplo é importante pois mais adiante (Capítulo Produto Interno p.137) responderemos a seguinte questão: dada uma função qualquer $f \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, determine o polinômio $p \in \mathcal{P}_n$ "mais perto possível" (num sentido que será tornado preciso) de f.*

Definição 3.19 (espaço de funções contínuas e diferenciáveis) *Dado conjunto $I \subset \mathbb{R}$ (não-vazio) qualquer, denotamos $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ o* ***espaço das funções contínuas*** *de I em $\mathbb{R}$ e por $\mathcal{C}^k(I;\mathbb{R})$ o* ***espaço das funções com k derivadas contínuas****. Finalmente temos o* ***espaço das funções com infinitas derivadas contínuas*** *$\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$. As operações de soma e multiplicação por escalar são iguais as da Definição 3.18.*

Exemplo 3.29 *As funções $f(x) = \cos(x), g(x) = \exp(x^2)$ pertencem a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. As funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/(x^2 - 1)$ pertencem ao espaço $\mathcal{C}^\infty((0,1);\mathbb{R})$ mas não pertencem a $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ pois não estão definidas no 0 nem no 1.*

A função $f(x) = |x|$ pertence a $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mas não pertence a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (não possui derivada em 0).

Observação 3.11 *Todo polinômio é infinitamente diferenciável; se uma função possui k derivadas, então ela possui $k-1$ derivadas; toda função diferenciável é contínua; toda função contínua é função. Deste modo temos a sucessão de subespaços vetoriais (cada um é subespaço vetorial de todos os que se seguem):*

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \cdots \subset \mathcal{C}^k(I;\mathbb{R}) \cdots \subset \mathcal{C}^2(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I;\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I;\mathbb{R}).$$

Exemplos importantes de espaços vetoriais de funções aparecem na teoria de equações diferenciais.

Exemplo 3.30 *Determine se são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$:*
(a) $T = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ y''(x) + 9y(x) = 0\}$.
(b) $U = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ y''(x) + 9y(x) = 9x\}$.
(c) $V = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ y'(x) + f(x)y(x) = 0\}$ para uma $f \in\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ fixa.
(d) $W = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ y'(x) + y^2(x) = 0\}$.

Solução: *(a) T é subespaço vetorial. De fato, dados $y_1, y_2 \in V$ (soluções), se tomarmos $y = ay_1 + by_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (constantes), como a derivada da soma é igual a soma das derivadas (linearidade da derivada), calculamos $y''+9y = ay_1''+by_2''+9(y_1+y_2) = ay_1''+9y_1+by_2''+9y_2 = 0+0 = 0$.*

Note que, em particular, se $y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ e $y_2 = \cos(3x)$, então $y_1, y_2 \in T$. Combinações destas funções também serão soluções (na realidade TODAS as soluções serão desta forma, mas não provaremos isto). Portanto, $T = \{ay_1 + by_2;\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

(b) U não é subespaço vetorial. Observe que se $y_1, y_2 \in U$, e $y = y_1 + y_2$, $y'' + 9y = 9x + 9x = 18x \neq 9x$. Portanto $y \notin U$. Além disso $y = \mathbf{0} \notin U$. Na realidade é a translação do subespaço do exemplo anterior. Mais precisamente, seja $y_0(x) = x$. Verifique que $y_0 \in U$, isto é, é solução (particular) da equação. Então $U = y_0 + T$.

(c) V é subespaço vetorial. É claro que $y = \mathbf{0} \in V$. Além disso, dados $y_1, y_2 \in V$ (soluções), se tomarmos $y = ay_1+by_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ (constantes), como a derivada da soma é igual a soma das derivadas (linearidade da derivada), calculamos $y'+fy = ay_1'+by_2'+f(y_1+y_2) = ay_1''+fy_1+by_2''+fy_2 = 0+0 = 0$. Logo $y \in V$.

(d) W não é um subespaço vetorial. Embora $y = \mathbf{0} \in W$, se y é solução, $w = ay$, então $w' + w^2 = ay' + a^2y^2 = ay' + ay^2 + ay^2 = 0 + ay^2 \neq 0$. Pode-se mostrar que W não é tampouco a translação de um subespaço. ■

3.5.2 Combinação Linear e Espaço Gerado

Exemplo 3.31 *Considere os vetores de $\mathcal{P}$ (espaço de todos os polinômios) $\mathbf{u} = x^3 + x$, $\mathbf{v} = x^2 - x$, $\mathbf{w}_1 = 3x^3 - x^2 + 4x$ e $\mathbf{w}_2 = x^3 + 2x^2 + 10$. Determine se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ são CL de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.*

Solução: *De fato, $\mathbf{w}_1$ é CL pois $\mathbf{w}_1 = 3x^3 - x^2 + 4x = 3(x^3 + x) - (x^2 - x) = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.*

Por outro lado, $\mathbf{w}_2$ não é combinação linear. Isto pois $\mathbf{w}_2 = x^3 + 2x^2 + 10 = \alpha(x^3 + x) + \beta(x^2 - x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 1)x$. Temos que resolver o sistema: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \alpha - 1 = 10 \end{cases}$.
Note que este sistema não possui solução (porque?). Portanto, $\mathbf{w}_2 \neq \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 3.32 *Considere os elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ $\mathbf{u} = \operatorname{sen}^2(x)$ e $\mathbf{v} = \cos^2(x)$ Determine se $\mathbf{w} = \cos(2x)$ é combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.*

Solução: *É combinação pois, por uma identidade trigonométrica conhecida, $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.* ■

Exemplo 3.33 *Prove que é subespaço vetorial e determine um conjunto gerador para:*

(a) $H = \{p \in \mathcal{P}_2 |\ p(2) = p(3)\} \subset \mathcal{P}_2$; *(b)* $Z = \{p \in \mathcal{P}_3 |\ p(1) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$.

Solução: *(a) É subespaço pois se dois polinômios possuem mesmo valor em* 2 *e* 3*, combinações lineares também possuirão o mesmo valor.*

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$*. Como* $p(2) = p(3)$, $4a+2b+c = 9a+3b+c$*, temos a equação* $5a + b = 0$*. São três variáveis e uma equação. Portanto são duas variáveis livres:* $c = r$ *e* $b = s$*, com* $a = -b/5 = -s/5$.

Logo $V = \{-s/5x^2 + sx + r;\ r, s \in \mathbb{R}\}$*, um plano (dimensão* 2*) em* $\mathcal{P}_2$*. Tomando* $r = 0, s = 1$ *obtemos* $\mathbf{u} = -x^2/5 + x$, $r = 1, s = 0$ *obtemos* $\mathbf{v} = 1$*. Logo* $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

(b) Deixamos para o leitor verificar que é subespaço vetorial. Seja $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$*. Como* $p(1) = 0$, $a + b + c + d = 0$*. São quatro variáveis e uma equação. Portanto são três variáveis livres:* $d = r, c = s, b = t$*, com* $a = -r - s - t$*. Logo* $H = \{(-r - s - t)x^3 + tx^2 + sx + r\}$*. Colocando* r, s, t *com* 0 *e* 1 *alternadamente, obtemos* $\mathbf{u} = -x^3 + 1, \mathbf{v} = -x^3 + x, \mathbf{w} = -x^3 + x^2$*. Portanto* $X = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Outra parametrização possível é tomar como variáveis livres: $a = r, b = s, c = t$*, com* $d = -r - s - t$*. Colocando* r, s, t *com* 0 *e* 1 *alternadamente, obtemos* $\mathbf{u} = x^3 - 1, \mathbf{v} = x^2 - 1, \mathbf{w} = x - 1$*. Portanto* $X = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. ■

Exemplo 3.34 *Se* $Z = \langle (x - 1),\ x(x - 1),\ \ldots,\ x^{n-1}(x - 1) \rangle$ *e* $W = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n \mid \mathbf{p}(1) = 0\}$*, prove que* $W = Z$.

Solução: *De fato, dado* $p \in W$*, como* $p(1) = 0$ *(*1 *é raiz), podemos dividir o polinômio por* $(x - 1)$*, obtendo que* $\mathbf{p}(x) = (x - 1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(x^i(x - 1)\right)$*. Logo* $\mathbf{p} \in Z$*. Por outro lado, se* $\mathbf{z} \in Z$*, então* $z(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i(x - 1)$, $z(1) = 0$ *e portanto* $\mathbf{z} \in W$. ■

Exemplo 3.35 *Mostre que*

(a) $\cos(2x) \in \langle 1, \cos(x), \cos^2(x) \rangle$. *(b)* $\cos(3x) \in \langle 1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x) \rangle$.

Solução: *(a) É verdade pois (identidade trigonométrica conhecida)* $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

(b) Utilizando a identidade de (a) e que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ *e* $\cos(3x) =$
$= \cos(x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)$*, obtemos que* $\cos(3x) = 2\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - \cos(x) - 2$.

Generalizando concluiremos que $\cos(nx) \in \langle 1, \cos(x), \ldots, \cos^n(x) \rangle$. ■

O próximo exemplo é mais sofisticado. Este tipo de combinação linear é utilizado nos chamados métodos dos elementos finitos, muito importante no cálculo de estruturas (engenharia civil, naval, mecânica etc.).

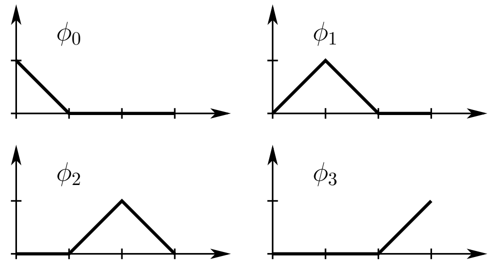
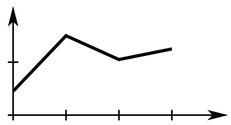


Figura 3.1: Elementos finitos

Exemplo 3.36 *Considere as funções $\phi_0, \ldots, \phi_3$ mostradas na Figura 3.1. Observe que elas são caracterizadas como funções lineares por partes (entre dois inteiros quaisquer elas são lineares, isto é, o gráfico é um segmento de reta) e que $\phi_i(j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é chamado de delta de Kroenecker, definido como 1 se $i = j$ e 0 caso contrário. Assim $\phi_0(0) = 1$ ($i = j$) e $\phi_0(1) = \phi_0(2) = 0$. Do mesmo modo, $\phi_1(1) = 1$ ($i = j$) e $\phi_1(0) = \phi_1(2) = 0$.*

Agora podemos fazer combinações lineares destas funções. Poderemos obter uma função linear por partes qualquer pois se quisermos que f assuma valores $f(j) = a_j$, com $j = 0, \ldots, 3$, tome $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i$. Deste modo $f(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(0) = a_0\phi_0(0) = a_0 \cdot 1 = a_0$ (as outras funções $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = 0$), e de forma análoga, $f(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i\phi_i(1) = a_1$, e também $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$. Desta forma CL das ϕ_i's podem gerar qualquer função linear por parte:

$\langle \phi_0, \ldots, \phi_3 \rangle = \Bigg\{$ funções tipo  $\Bigg\}$.

3.5.3 Dependência e Independência Linear, Base

Exemplo 3.37 *Determine se são LIs ou LDs:*

(a) $\{1,\ t,\ t^2\ \}$; *(b)* $\{t,\ e^t\}$;

(c) $\{\operatorname{sen}(2x),\ \operatorname{sen}(x)\cos(x)\}$; *(d)* $\{\operatorname{sen}(2x),\ \operatorname{sen}^2(x)\}$; *(e)* $\{\operatorname{sen}^2(x),\ \cos^2(x),\ 1\}$.

Solução: *(a) Suponha que $a1 + bt + ct^2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Apresentamos duas provas que $a = b = c = 0$ e portanto o conjunto é LI:*

— Derivando obtemos que $b + 2ct = 0$ e $2c = 0$. Logo $c = 0$, $b = 0$ e $a = 0$.

— Colocando $t = 0$ obtemos que $a = 0$. Colocando $t = 1$ e $t = 2$ obtemos as equações: $b + c = 0$ e $2b + 4c = 0$, cuja solução única é $b = c = 0$.

(b) Suponha que $at + be^t = 0$. Colocando $t = 0$ obtemos que $b = 0$. Colocando $t = 1$ obtemos que $a(1) = 0$ e $a = 0$. Logo é LI.

(c) É LD pois $\operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Suponha que $a\operatorname{sen}(2x) + b\operatorname{sen}^2(x) = 0$ para todo x. Tomando $x = \pi/2$ obtemos que $a(0) + b(1) = 0$. Logo $b = 0$. Tomando $x = \pi/4$, $a(1) = 0$ e $a = 0$. Como $a = b = 0$ concluímos que é LI.

(e) É LD pois $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) - 1 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Observação 3.12 (conjunto de funções é LI?) *Para determinar se um conjunto de funções é LI, uma ferramenta **importante** é o chamado **Wronskiano**, apresentado na Definição 6.24 da p.193. Veja também o Exemplo 4.43 da p.120.*

Exemplo 3.38 *Prove que:*

(a) $\{1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n\}$ *é base de* $\mathcal{P}_n$; *(b)* $\{1 - t,\ 2 + t,\ t + t^2\}$ *é base de* $\mathcal{P}_2$.

Solução: *(a) De fato suponha $q(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 0$ concluímos que $a_0 = 0$. Derivando obtemos que $q'(0) = a_1 = 0$. Continuando $q''(t) = 2a_2 = 0$ e $a_2 = 0$. De forma geral $f^{(k)}(0) = k!a_k = 0$ e concluímos que $a_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Logo o conjunto é LI. É claro que gera $\mathcal{P}_n$ (prove!). Logo é base.*

(b) Seja $q(t) = at^2 + bt + c$. Queremos escrever $q(t) = \alpha(1 - t) + \beta(2 + t) + \gamma t^2$. Igualando termos do mesmo grau e resolvendo o sistema obtemos a solução única $\gamma = a$, $\beta = (b + c)/3$, $\alpha = (c - 2b)/3$. Como a representação é única, é base. ■

Exemplo 3.39 *Retomando as funções da Figura 3.1 da p.79, prove que $\phi_0, \ldots, \phi_3$ é LI.*
Solução: *De fato, suponha que $f(t) = a_0\phi_0(t) + \cdots a_3\phi_3(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $f(0) = 0$. Como $f(0) = a_0\phi_0(0) + \cdots a_3\phi_3(0) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_3 \cdot 0 = a_0 = 0$, concluímos que $a_0 = 0$. De forma análoga, $f(1) = a_0\phi_0(1) + a_1\phi_1(1) + \cdots a_3\phi_3(1) = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + \cdots + a_3 \cdot 0 = a_1 = 0$, concluímos que $a_1 = 0$. Procedendo desta forma, concluiremos que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, e que a única CL de zero é trivial.* ■

3.5.4 ⋆Funções como Vetores: Representação Geométrica[1]

Como representar geometricamente uma função como um vetor?

Vamos começar vendo uma nova representação geométrica de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Já mostramos que podemos representar vetores como "setinhas" (segmentos orientados equivalentes). Agora vamos representá-los como gráficos de funções da seguinte forma. Dado $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$, ou seja, dada uma função $f : \{1,2\} \to \mathbb{R}$, ela fica inteiramente determinada uma vez fixado os valores $f(1)$ e $f(2)$. Portanto associamos a $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$ o vetor $\mathbf{f} = (f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, dado $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, associamos a função $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$ tal que $f(1) = a_1$ e $f(2) = a_2$. Por exemplo, o vetor $\mathbf{f} = (5,3) \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado como o gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1,2\};\mathbb{R})$, como indicado na Figura 3.2. De forma análoga, dada $g \in \mathcal{F}(\{1,2,3\};\mathbb{R})$, ou seja, dada uma função $g : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, associamos o vetor $\mathbf{g} = (g(1), g(2), g(3)) \in \mathbb{R}^3$. Reciprocamente, dado $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, associamos a função $g \in \mathcal{F}(\{1,2,3\};\mathbb{R})$ tal que $g(1) = a_1$, $g(2) = a_2$ e $g(3) = a_3$. Por exemplo, o vetor $\mathbf{g} = (3,5,2) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado como o gráfico de $\mathbf{g}$, como indicado na Figura 3.2.

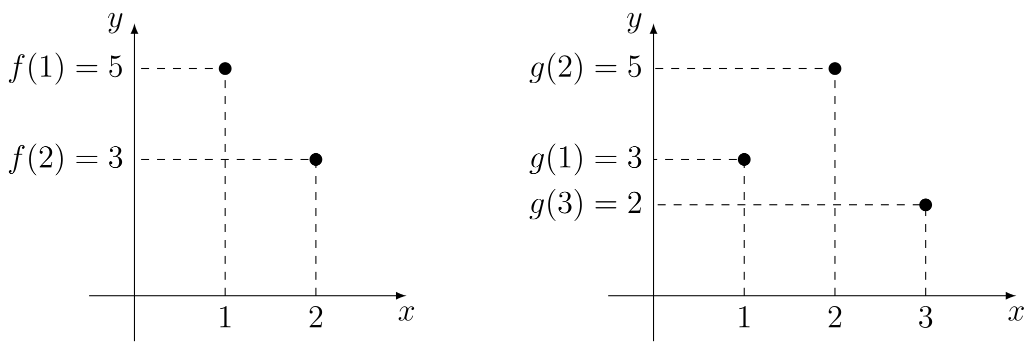


Figura 3.2: Representando $\mathbf{f} = (5,3) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} = (3,5,2) \in \mathbb{R}^3$.

.

A vantagem deste ponto de vista é que os desenhos são bidimensionais, e podemos representar, por exemplo, o vetor $\mathbf{f} = (2,4,3,4,1) \in \mathbb{R}^5$ pelo gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1,2,3,4,5\};\mathbb{R})$ definida por $f(i) = a_i$, $i = 1, \ldots, 5$, como indicado na Figura 3.3. Note que com a interpretação geométrica de setinhas **não** tínhamos como representar vetores do $\mathbb{R}^n$ com $n > 3$.

Generalizando, como um vetor é um $n-$upla de números reais, podemos associar a $\mathbf{f} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ uma função $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Assim podemos representar $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, para n qualquer, pelo gráfico de $f \in \mathcal{F}(\{1, \ldots, n\};\mathbb{R})$. Agora se substituirmos $\{1, \ldots, n\}$ por I com $I \subset \mathbb{R}$ qualquer, podemos representar o vetor (elemento do espaço de funções) $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ pelo gráfico de

[1]A leitura desta subseção é opcional.

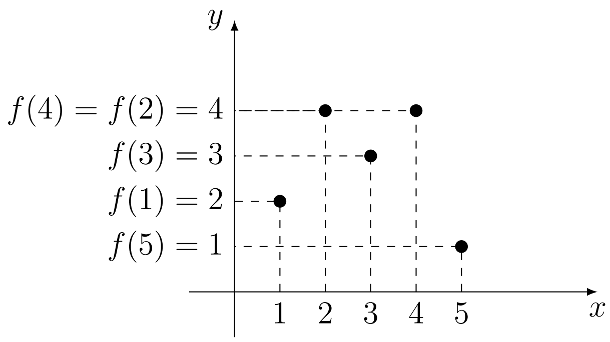


Figura 3.3: Representando $f = (2, 4, 3, 4, 1) \in \mathbb{R}^5$.

$\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}$. Por exemplo $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([0, \pi]; \mathbb{R})$, definido por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, pode ser representado pelo seu gráfico, como indicado na Figura 3.4.

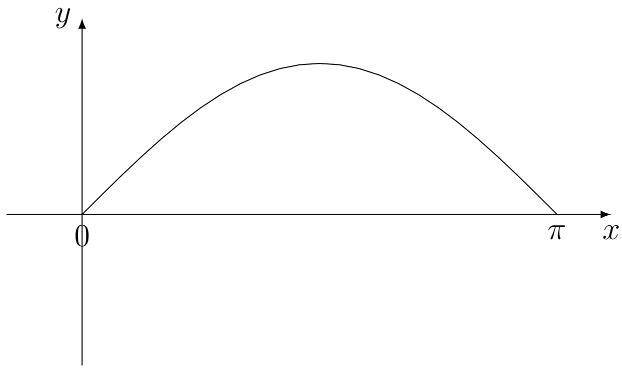


Figura 3.4: Representando $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([0, \pi]; \mathbb{R})$, com $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Observação 3.13 *Fixemos a notação $I_n = \{1, \ldots, n\}$. A representação de vetores do $\mathbb{R}^n$ como função é coerente no seguinte sentido. Vamos nos concentrar na operação de soma de vetores (a multiplicação por escalar é análogo). Já definimos anteriormente como somar vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: basta somar componente a componente. Se interpretarmos estes vetores como funções $u, v : I_n \to \mathbb{R}$, definimos a função soma (veja Definição 3.18 da p.77) $u + v : I_n \to \mathbb{R}$ por $(u + v)(i) = u(i) + v(i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Note que apesar de ser definido de outra forma, obtemos a mesma coisa.*

Exemplo 3.40 *Considere $f, g \in \mathcal{F}([0, 1] \times [0, 1]; \mathbb{R})$, onde cada função representa o nível de cinza de cada ponto do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Desta forma cada função representa uma imagem. Agora vamos visualizar os elementos da reta $r(t) = tg + (1 - t)f$, onde $r(0.0) = f$ e $r(1.0) = g$. Neste exemplo, conforme mostra a Figura 3.5, a função $f = r(0.0)$ é um quadrado e $g = r(1.0)$ um círculo. Observe a transformação de um quadrado em um círculo, onde representamos os pontos intermediários da reta r: $r(0.2), \ldots, r(0.8)$.*

Em processamento de imagem estas transformações são chamadas de morfismos. Podemos, por exemplo, criar imagens intermediárias entre imagens distintas, misturando características.

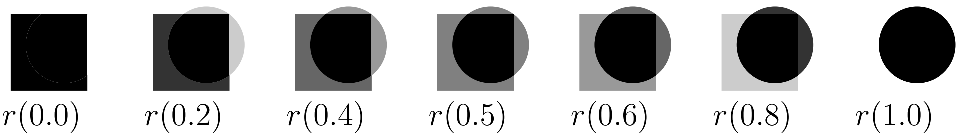


Figura 3.5: Quadrado se transforma em círculo

3.6 ⋆Dimensão de Espaço Vetorial: Teoria[1]

Provamos nesta seção que se um espaço vetorial V possui uma base com $d \in \mathbb{N}$ vetores, então **qualquer** base de V possuirá d vetores, o que permite definir a dimensão de V como d. Além disso uma sequência de resultados provará que qualquer conjunto LI de vetores de V pode ser estendido para formar uma base.

Começamos enunciando um resultado **muito** importante na teoria dos espaços vetoriais.

Teorema 3.20 *Todo espaço vetorial possui uma base.*

Prova: A prova é delicada: veja em [5]. ∎

Vamos distinguir os espaços vetoriais de dimensão finita e infinita.

Definição 3.21 (dimensão finita e infinita) *Um espaço vetorial que admite base finita é de **dimensão finita**. Um espaço vetorial que não admite, é dito de **dimensão infinita**.*

Exemplo 3.41 *$\mathbb{R}^n$ é de dimensão finita, pois $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é base.*

Exemplo 3.42 *$\mathcal{P}_n$ é de dimensão finita, pois $\varepsilon = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é base.*

Exemplo 3.43 *$\mathcal{P}$ é de dimensão infinita.*

De fato, dado $\beta = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathcal{P}$ conjunto finito qualquer, defina $N = \max_{\mathbf{p} \in \beta} \operatorname{grau}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{q}(x) = x^{N+1}$. Então $\mathbf{q} \in \mathcal{P}$, mas $\mathbf{q} \notin \langle \beta \rangle$ pois $\operatorname{grau}(\mathbf{q}) = N+1 > N \geq \operatorname{grau}(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in \beta$. Logo, β não é base.

Exemplo 3.44 *Os espaços $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^2(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ são de dimensão infinita.*

De fato todos os espaços acima contém o espaço $\mathcal{P}$ (vide Observação 3.11 da p.78).

O próximo lema é fundamental para a definição de dimensão.

Lema 3.22 (conjunto gerador e LI) *Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset H$. Se β é gerador de H e γ é LI, então $m \geq n$.*

Prova: Sejam a_{ij} tais que $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{u}_i$. Defina $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$.

Suponha, por absurdo, que $n > m$. Portanto o número de variáveis (n) é maior que o número de equações (m) no sistema homogêneo. Neste caso, existe $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo $\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, o que implica que $\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0$ para todo i. Segue que $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Portanto $\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{u}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

Concluímos que γ não é LI! Como isto é absurdo, concluímos que $n \leq m$. ∎

[1] A leitura desta seção é opcional.

Corolário 3.23 *Toda base de um subespaço vetorial de dimensão finita tem o **mesmo número** de elementos.*

Prova: Sejam $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases. Pelo Lema 3.22, como β é gerador e γ é LI, então $m \geq n$. Trocando os papéis de β e γ, novamente pelo Lema 3.22, como γ é gerador e β é LI, então $n \geq m$. Como $m \geq n$ e $n \geq m$, concluímos que $m = n$. ■

Este Corolário justifica a próxima definição.

Definição 3.24 (dimensão) *A **dimensão** de um (sub)espaço vetorial de dimensão finita é o número de vetores em (qualquer) uma de suas bases.*

Lema 3.25 (caracterização dos conjuntos LD) *Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ são LD se, e só se, existe um vetor que é combinação linear dos anteriores, $\mathbf{v}_k = \sum_{i<k} \alpha_i \mathbf{v}_i$.*

Prova: **Se:** trivial.

Só se: seja $k \geq 1$ mínimo tal que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são LD. Seja $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ CL não-trivial. Se α_k fosse zero, $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ seria CL não-trivial, contrariando a minimalidade de k. Assim, $\alpha_k \neq 0$ e $\mathbf{v}_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \mathbf{v}_i$. ■

O próximo lema nos diz que podemos eliminar vetores que são CL de outros de um conjunto sem modificar o espaço gerado.

Lema 3.26 (eliminando vetores redundantes) *Dado um conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ LD, seja $\mathbf{v}_k$ CL dos demais. Então $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle S \rangle$.*

Prova: Temos que $\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i \mathbf{v}_i$. Dado $\mathbf{w} \in \langle S \rangle$, temos $\mathbf{w} = \sum_{i} \gamma_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \neq k} \gamma_i \mathbf{v}_i + \gamma_k \mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} \gamma_i \mathbf{v}_i + \gamma_k \sum_{i \neq k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \neq k} (\gamma_i + \gamma_k \alpha_i) \mathbf{v}_i$. Logo $\mathbf{w} = \sum_{i \neq k} (\gamma_i + \gamma_k \alpha_i) \mathbf{v}_i$ e portanto, $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. ■

Corolário 3.27 *Todo conjunto gerador finito contém uma base.*

Prova: Se o conjunto é LI, nada a fazer. Se é LD, há um vetor que é combinação linear dos demais. Descarte este vetor; o subconjunto obtido ainda é gerador (pelo lema anterior). Repita o procedimento até que o subconjunto obtido seja LI. ■

Finalmente, o resultado abaixo garante que, dado um conjunto de vetores LI em um espaço vetorial de dimensão finita, este pode ser estendido a uma base.

Lema 3.28 (estendendo conjunto LI em base) *Todo conjunto LI em um espaço de dimensão finita pode ser estendido a uma base. Ou seja, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI, existem $\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tais que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é base.*

Prova: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ LI e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base. Note que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é gerador. Aplique o resultado anterior, notando que, enquanto o subconjunto é LD, existe um vetor que é combinação linear dos **anteriores** (Lema 3.25). Este não pode ser um dos $\mathbf{v}_i$'s. Portanto, os $\mathbf{v}_i$'s não são descartados no processo. ∎

Corolário 3.29 *Em um espaço vetorial de dimensão n, dado $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ (um conjunto ordenado de vetores com p elementos), se:*

- $p > n$, *então β não é LI;*
- $p < n$, *então β não é gerador; e*
- $p = n$, *então β é gerador se e só se é LI.*

3.7 Exercícios de Espaços Vetoriais

3.7.1 Exercícios de Fixação

Fix 3.1: Determine se é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$:
(a) o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo;
(b) o conjunto-solução de um sistema linear cujo lado direito tem como entradas inteiros maiores do que 1;
(c) plano passando pela origem no espaço;
(d) reta que não passa pela origem no plano;
(e) parábola que passa pela origem no plano;
(f) primeiro quadrante do plano;

Fix 3.2: Se $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, então:
(a) $\mathbf{0}$ ___$(\in, \notin)$ W; (b) $6\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$ ___$(\in, \notin)$ W; (c) $\dim W$ ___$(=; <; \leq; >; \geq)$ n.

Fix 3.3: Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(a) se não tem solução, então $\mathbf{b}$ ___ $(\in, \notin)$ _____$(Im(A), Nuc(A))$;
(b) se a solução não é única, então $\mathrm{Nuc}(A)$ ___ $(=, \neq)$ _____$(Im(A), \{\mathbf{0}\})$.

Fix 3.4: Seja $\beta \subset \mathbb{R}^7$ gerador.
(a) β possui ________(*no máximo, exatamente, no mínimo*) 7 vetores;
(b) retirando de β um vetor, obtemos um conjunto que ________(*é, não é, pode ser*) gerador;
(c) acrescentando a β um vetor $\mathbf{w} \notin \beta$, obtemos um conjunto que ________(*é, não é, pode ser*) gerador;
(d) o vetor $\mathbf{0}$ ______(*pertence, não pertence, pode pertencer*) a β.

Fix 3.5: Seja $\beta \subset \mathbb{R}^7$ LI.
(a) β possui ________(*no máximo, exatamente, no mínimo*) 7 vetores;
(b) retirando de β um vetor, obtemos um conjunto que ________(*é, pode ser*) ___(*LI, LD*);
(c) acrescentando a β um vetor $\mathbf{w} \notin \beta$, obtemos um conjunto que ________(*é, pode ser*) ___(*LI, LD*);
(d) o vetor $\mathbf{0}$ ______(*pertence, não pertence, pode pertencer*) a β.

Fix 3.6:
(a) Se o espaço gerado por $\mathbf{u}$ é igual ao espaço gerado por $\mathbf{v}$, então necessariamente ________($\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *é múltiplo de* $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *é perpendicular a* $\mathbf{v}$, *nenhuma das alternativas*)

[0]Versão 08.out.2012 09h

(b) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$, então necessariamente _______(*$\mathbf{v} = \mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ é perpendicular a $\mathbf{w}$, nenhuma das alternativas*)

(c) Sabendo que o conjunto $\{\mathbf{w}\}$ é LI podemos afirmar que $\mathbf{w}$ é _______(*não nulo, nulo*).

Fix 3.7: Escolha uma opção. Dizer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é LI é o mesmo que dizer que:

(A) se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, então $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n = 0$;

(B) $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n = 0$ para todo $\lambda_i \in \mathbb{R}$;

(C) se $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n = 0$, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$;

(D) $\mathbf{v}_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$;

(E) $\mathbf{v}_i$ não é múltiplo de $\mathbf{v}_k$ se $i \neq k$.

Fix 3.8: Considere $W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\rangle$. Obtemos base de W _________(*escalonando, multiplicando, zerando, somando*) uma matriz que tem estes vetores como _________(*linhas, colunas*).

Fix 3.9: Seja W o subespaço-solução de um sistema linear homogêneo com 4 equações:

(a) eliminando uma equação, $\dim(W)$ _______(*pode, vai*) _______(*aumentar, diminuir*).

(b) acrescentando uma equação (com lado direito igual a zero), $\dim(W)$ _______(*pode, vai*) _______(*aumentar, diminuir*).

Fix 3.10: Sejam $V, W \subset \mathbb{R}^3$ subespaços vetoriais, com $\dim(V) = 2$ e W uma reta.

(a) $\dim(W) =$ __(*0, 1, 2, 3*); (b) V é um(a) _______(*ponto, reta, plano, sistema*);

Fix 3.11: Pode ser base de $\mathbb{R}^5$ um conjunto com:

(a) 4 vetores LIs? (b) 5 vetores LDs? (c) 6 vetores?

Fix 3.12: Considere S um conjunto ordenado de vetores. Determine se é verdadeiro ou falso:

(a) se todo vetor de um espaço pode ser escrito como combinação linear de elementos de S, então S é base;

(b) se S é base, então S é um conjunto linearmente dependente de vetores;

Fix 3.13: Considere V e W planos distintos contendo a origem em $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) $V \cap W$; (b) $V + W$.

Fix 3.14: O elemento neutro para soma do espaço vetorial das funções reais é o(a) _________ (*número zero, função identidade, função identicamente nula, conjunto vazio*).

Fix 3.15: Determine se são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$:

(a) $\{\text{funções contínuas}\}$; (b) $\{f = a\operatorname{sen}(x) + 2,\ a \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{f = ax^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

3.7.2 Problemas

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Prob 3.1: Determine se é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 |\ a, c \in \mathbb{R}, b = a + c + 1\}$; (b) $\{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 |\ a \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 |\ a, b \in \mathbb{R}, 2a + 3b = 5c\}$;

Prob 3.2: Determine se formam um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ subconjunto de todos vetores:

(a) com exceção daqueles paralelos a uma reta dada;

(b) cujas coordenadas são maiores ou iguais a zero.

Prob 3.3: Determine se:

(a) $(1, 0, 6) \in \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1)\rangle$; (b) $(1, -2, 1) \in \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1)\rangle$;

(c) $\{(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)\}$ é LI;

Prob 3.4: Determine se os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$
(a) $\{(0, 0, 0)\}$ e (b) $\{(1, 0, -2)\}$ são LIs.

(c) Caracterize, de forma geral, os conjuntos de **um único elemento** que são LI.

Prob 3.5: Determine se os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$
(a) $\{(0,0,0),\ (1,0,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$, (b) $\{(1,0,-2),\ (1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e
(c) $\{(1,0,-2),\ (2,0,-4)\} \subset \mathbb{R}^3$ são LIs.

(d) Caracterize, de forma geral, os conjuntos de **dois elementos** que são LI.

Prob 3.6: Determine se os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$
(a) $\{(1,0,-2),\ (2,1,1),\ (4,1,-1)\}$ e (b) $\{(1,0,-2),\ (2,1,1),\ (1,2,8)\}$ são LIs.

(c) Existe uma caracterização fácil dos conjuntos de **três elementos** que são LI? (Fácil no sentido de que se possa decidir "de cabeça" se o conjunto é ou não LI, sem a necessidade de se escalonar nada.)

Prob 3.7: Fazendo o mínimo necessário de contas, diga se são bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Prob 3.8: Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) hiperplano $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - w = 0\}$;

(b) conjunto-solução de $\left\{ \begin{array}{r} x + z - w = 0 \\ -z + w = 0 \end{array} \right.$;

(c) conjunto-solução de $\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$;

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} r + 2s + t \\ -s - 2t \\ 2r + s - 4t \\ r - 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \, r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

Prob 3.9: Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$: V conjunto solução de $\{\ x + y - w = 0$, W conjunto solução de $\left\{ \begin{array}{r} x + z - w = 0 \\ -z + w = 0 \end{array} \right.$ e $Z = \langle (1,1,2,1),\ (0,1,1,0) \rangle$. Determine (veja Exemplo 2.31 da p.51 e Exemplo 2.32 da p.52 uma base para:

(a) $V \cap W$; (b) $Z \cap V$; (c) $Z \cap W$.

Prob 3.10: Dados os espaços $W_1 = \{(s+t, t-s, s+t, 2s+t) \in \mathbb{R}^4 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0 \text{ e } x - w + z = 0\}$, determine base e a dimensão de:

(a) W_1; (b) W_2; (c) $W_1 + W_2$.

LI e LD: teóricos

Prob 3.11: Prove que para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ o conjunto $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathbf{u}\}$ é LD.

Prob 3.12: Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vetores LI e $\mathbf{w} \in W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Prove que:

(a) $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD; (b) $\{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI; (c) $\langle \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle \neq W$.

Prob 3.13: Considere U e V subespaços de dimensão 3 contidos em $\mathbb{R}^p$. Para cada p abaixo determine menor valor possível para $\dim(U \cap V)$:

(a) $p = 3$; (b) $p = 4$; (c) $p = 5$; (d) $p = 6$.

Espaços de Polinômios e Funções

Prob 3.14: Verifique se é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$ o conjunto das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:

(a) $f(a) = f(b) = 0$; (b) $f(a) = f(b) = 1$;
(c) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$; (d) f é derivável e $f' + 2f = 0$.

Prob 3.15: Mostre que é LD:
(a) $\{1 + 2x,\ 1 + x,\ 1 - x\} \subset \mathcal{P}_2$; (b) $\{1,\ \text{sen}^2(x),\ \cos^2(x)\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Prob 3.16: Determine se são LIs ou LDs em $\mathcal{P}_3$:
(a) $\{1,\ x^2,\ x^2 + 4\}$; (b) $\{x + 2,\ x + 3,\ x^2 - 3\}$; (c) $\{x^2 - 2x,\ 1 + x,\ x^2 + 2\}$.

Prob 3.17: Considere o espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis. Verifique que o subespaço:
(a) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f' = 0\}$ é gerado por g tal que $g(x) = 1$;
(b) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f' - f = 0\}$ é gerado por g tal que $g(x) = e^x$;

Prob 3.18: Determine se é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_4$ (espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 4). Em caso afirmativo determine uma base e dimensão.
(a) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(2) = 0\}$; (b) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(2) = 1\}$.

3.7.3 Extras

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Ext 3.1: Determine se:
(a) $(1, 0, 1) \in \langle (1, 1, 1), (1, 2, 1) \rangle$; (b) $\{(k, 1, 1), (1, k, 1), (1, 1, k)\}$ é LI para $k \in \mathbb{R}$;
(c) $\mathbb{R}^3 = \langle (2, -1, 3), (4, 1, 2), (8, -1, 8), (6, 0, 5) \rangle$;

Ext 3.2: Fazendo o mínimo necessário de contas, diga se são bases de $\mathbb{R}^3$:
(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Ext 3.3: Determine uma base e a dimensão dos subespaços do $\mathbb{R}^4$, solução do sistema linear:
(a) $\left\{ x - y + z - w = 0 \right.$; (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z - 2w & = & 0 \\ 2x + y - z - w & = & 0 \\ x + 2y - 2z + w & = & 0 \end{array} \right.$.
(c) acrescente equações não-nulas a (b) que não alterem o subespaço.

Ext 3.4: Determine para cada subespaço do $\mathbb{R}^n$ abaixo uma base e a dimensão:
(a) $\langle (0, -1, 2, 1), (1, 2, 1, 0), (1, 1, 3, 1), (3, 5, 5, 1) \rangle$;
(b) $\langle (1, 0, 1, -1), (2, 3, 3, 0), (1, 3, 2, 1), (0, 3, 1, 2) \rangle$;
(c) $\langle (1, 2, 0, 1, 2), (-1, 0, 1, 2, 1), (0, 6, 3, 9, 9) \rangle$.

Ext 3.5: Considere $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que eles são LDs se, e somente se, $ad - bc = 0$.

Ext 3.6: Considere o conjunto-solução do sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ x + w = 0 \end{array} \right.$. Queremos retirar uma equação e acrescentar uma equação ao sistema mantendo o mesmo espaço solução. Determine uma equação que pode ser:
(a) retirada; (b) acrescentada, que seja não-nula e distinta das outras.

LI e LD: teóricos

Ext 3.7: Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto LI. Prove que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ com $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i$ (com $i = 1, 2, 3$) é um conjunto LI.

Ext 3.8: Seja A matriz $m \times n$. Prove que:

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução para todo lado direito $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, se e só se as colunas de A formam um conjunto gerador do $\mathbb{R}^m$.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução única se e só se as colunas de A formam um conjunto LI.

Ext 3.9: Suponha que os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ têm, ambos, soluções únicas. O que podemos dizer sobre o conjunto-solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, onde:

(a) $\mathbf{c} = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_1$? (b) $\mathbf{c}$ é qualquer vetor?

Ext 3.10:

(a) Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tal que o subconjunto $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, com $k \le n$, é LD. Mostre que β é LD.

(b) Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI, então qualquer subconjunto será LI também.

Ext 3.11: Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores tal que: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ é LI e $\mathbf{v}_n \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$. Mostre que β é LI.

Ext 3.12: Sejam $H, K \subset V$ subespaços vetoriais. Mostre que:

(a) $H \cup K$ não é, em geral, subespaço;

(b) $\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$.

Espaços de Funções ou Polinômios

Ext 3.13: Considere o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Verifique que o subespaço:

(a) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f'' = 0\}$ é gerado por g e h tais que $g(x) = 1$ e $h(x) = x$;

(b) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) |\ f'' + f = 0\}$ é gerado por g e h tais que $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(x) = \cos(x)$;

Ext 3.14: Verifique se é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ o conjunto das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que:

(a) f é uma função constante; (b) f é derivável;

(c) f não é derivável; (d) f é contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Ext 3.15: Determine se é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_4$ (espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 4). Em caso afirmativo determine uma base e dimensão.

(a) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p'(2) = 0\}$; (b) $\{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(x) = p(-x)\}$;

Ext 3.16: Considere $V = \{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(1) = 0\}$ e $W = \{p \in \mathcal{P}_4 |\ p(-1) = 0\}$. Determine uma base e a dimensão de:

(a) V; (b) W; (c) $V \cap W$.

Ext 3.17: Determine a dimensão de $\langle \cos^2(x), \operatorname{sen}^2(x), \cos(2x) \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

3.7.4 Desafios

Des 3.1: Prove que se $V \subset \mathbb{R}^1$ é um subespaço vetorial, então $V = \mathbf{0}$ ou $V = \mathbb{R}$.

Des 3.2: Considere $W \subset V \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim(W) = \dim(V)$. Prove que $W = V$.

Des 3.3: Um **subespaço afim** H é a translação de um subespaço vetorial W, isto é, existe um vetor $\mathbf{h}_0 \in V$ e um subespaço vetorial $W \subset V$ tal que $H = \mathbf{h}_0 + W = \{\mathbf{h}_0 + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$.

(a) Prove que H (não-vazio) é um subespaço afim se, e somente se, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, vale $\theta\mathbf{u} + (1 - \theta)\mathbf{v} \in H$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$;

(b) Qual propriedade geométrica é expressa por esta propriedade?

Des 3.4:

Definição 3.30 (soma direta de subespaços) *Dados subespaços vetoriais H e K se $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$, dizemos que $H + K$ é uma* ***soma direta****, denotando-a por $H \oplus K$.*

Suponha que $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Explique como determinar um subespaço W de modo que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$ (soma direta).

Des 3.5: Sejam $p, q \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $V = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0\}$ (Problema de Sturm-Liouville).

(a) Mostre que V é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$;

(b) Dado $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, seja f_0 uma solução de $f_0''(x) + p(x)f_0'(x) + q(x)f_0(x) = g(x)$. Mostre que $h = f + g$, com $f \in V$, é solução também, isto é, dada uma solução particular da equação não-homogênea e uma solução qualquer da equação homogênea, a soma delas é solução da não-homogênea.

(c) Prove que $\dim V = 2$.

Des 3.6: Considere $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, o espaço das funções reais com domínio em $\mathbb{R}$. Sejam $V_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ f(-x) = f(x)\}$ (funções pares) e $V_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) |\ f(-x) = -f(x)\}$ (funções ímpares). Exemplos são $\operatorname{sen}(x), x, x^3 \in V_2$ e $\cos(x), 1, x^2 \in V_1$. De forma geral $x^n \in V_1$ (é par) se n é par e $x^n \in V_2$ (é ímpar) se n é ímpar. Mostre que:

(a) V_1 e V_2 são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$; (b) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;

(c) $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (soma direta, veja Definição 3.30 da p.90).

Des 3.7: Considere as funções reais $I_{[a,b]}$, definidas por $I_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a, b]$ e $I_{[a,b]}(x) = 0$ caso contrário. É chamada de função característica (ou indicadora) do intervalo $[a, b]$. Defina $f_k = I_{[k,k+1]}$.

(a) Prove que o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é LI's para qualquer n.

(b) Conclua que o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ possui dimensão infinita.

Des 3.8: Dado um espaço vetorial V e um conjunto I (não-vazio) qualquer, considere $\mathcal{F}(I;V)$, o espaço das funções de I em V. Definas as operações de soma e multiplicação por escalar utilizando as operações correspondentes em V, tal qual na Definição 3.18 da p.77. Prove que $\mathcal{F}(I;V)$ é um espaço vetorial.

Des 3.9: Considere o espaço das funções reais no intervalo $(0, \infty)$. Mostre que as funções $x^{r_1}, \ldots, x^{r_k}$ formam um conjunto LI com $r_i \in \mathbb{R}$ distintos, $r_i > 0$.

Des 3.10: Seja P o conjunto dos números reais positivos. Dados $x, y \in P$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defina:

(a) a "soma" $x \oplus y$ por xy; (b) o "produto" $\lambda \odot x$ por x^λ.

P é um espaço vetorial com estas operações? Se for, determine uma base e dimensão.

Capítulo 4

Transformação Linear e Matriz

Neste capítulo estudamos os objetos centrais de um curso de Álgebra Linear: **transformações lineares** (um tipo especial de função) e **matrizes**.

Até agora matrizes apareceram apenas como um artifício para resolver sistemas lineares: ao invés de se trocar linhas de um sistema, trocam-se linhas da matriz que o representa, etc. Neste capítulo as matrizes aparecerão como objetos matemáticos importantes. Vamos definir operações no conjunto das matrizes e provar que formam um espaço vetorial quando munido com estas operações. Veremos que matrizes representam funções (mais exatamente transformações lineares) do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Por exemplo, matrizes representam transformações geométricas como projeção, reflexão e rotação.

Vamos (re)ver conceitos básicos sobre funções como domínio e imagem, função injetiva e sobrejetiva, composição de funções e função inversa. Estes conceitos serão aplicados em transformações lineares (TLs daqui por diante), e matrizes.

Embora tipicamente o aluno já saiba multiplicar matrizes, jogaremos novas luzes sobre o assunto: qual a origem e diversas interpretações da definição da multiplicação de matrizes; como multiplicar matrizes em blocos.

Definimos espaços vetoriais **importantes** associados a TLs e matrizes:
(a) o núcleo; (b) a imagem; (c) o espaço-linha e coluna de uma matriz.

Os resultados principais deste Capítulo são:

— o Teorema 4.12 da p.102 (teorema do núcleo-imagem), que relaciona as dimensões do núcleo, imagem e domínio de uma TL ou matriz.

— O Lema 4.17 da p.105 que determina condições para que uma TL seja injetiva ou sobrejetiva.

— o Teorema 4.31 da p.112 que relaciona o núcleo com a existência de inversa.

— O Teorema 4.36 da p.114 que apresenta um algoritmo para o cálculo da matriz inversa.

— O Lema 4.46 da p.117 que mostra como somar e multiplicar com uma matriz em blocos.

Terminamos o capítulo com duas seções opcionais: uma sobre coordenadas de um vetor numa base e outra sobre representação matricial de uma TL qualquer e mudança de base.

[0]Versão 05.out.2012 01h

4.1 Função, Transformação Linear e Matriz

4.1.1 Domínio e Imagem de Função

Definição 4.1 (domínio, contradomínio e imagem de função) *Seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos (veja Figura 4.1) que:*

- *X é o **domínio**;*
- *Y é o **contra-domínio** e*
- *$\{y \in B; y = f(x)$ para algum $x \in X\}$ é a **imagem**, denotada $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(X)$.*

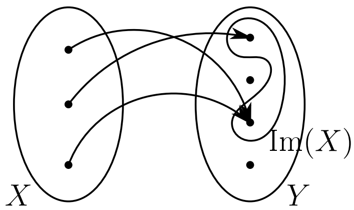


Figura 4.1: Função $f : X \to Y$

Observação 4.1 *No contexto de Álgebra Linear é comum utilizar o termo **transformação** como sinônimo de **função**.*

Exemplo 4.1 *Alguns exemplos de funções:*

(a) Considere $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma função definida, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\, t) \in \mathbb{R}^2$. Verifique que a imagem de γ é um círculo unitário, uma curva contida em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $V(x, y) = (-y, x)$. Pode-se visualizar esta função como um campo de vetores no plano. A cada ponto (x, y) associamos o vetor $V(x, y)$.

(c) Considere o conjunto $\mathcal{F}$ das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Defina $D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por $D(f) = f'$ (a derivada da função). A cada função derivável associamos outra função: sua derivada.

(d) Considere $T : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função que associa a cada ponto do conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ (pode-se pensar numa bloco de metal) sua temperatura $T(x, y, z)$.

No exemplo anterior vimos exemplos de funções entre $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Podemos ter, de forma mais geral, funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Estas serão objeto de quase todo capítulo.

4.1.2 Transformação Linear e Matriz

Definição 4.2 (transformação linear) *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma função (ou transformação) $T : V \to W$ é dita **transformação linear (TL)** se:*

$$T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \text{ (preserva produto) e } T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \text{ (preserva soma),}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e k escalar. Isto é equivalente a preservar combinações lineares, isto é:

$$T(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = kT(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

Exemplo 4.2 (TLs triviais) *Verifique que são TLs:*

(a) $I : V \to V$ *definida por* $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$*, chamada de* ***identidade****.*

(b) $\mathbf{0} : V \to W$ *definida por* $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$*.*

Solução: Deixamos para o leitor. ■

Exemplo 4.3 *Determine se é TL uma* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

(a) $T(x,\ y,\ z) = (z,\ -x)$; *(b)* $T(x,\ y,\ z) = (z,\ xy)$.

Solução: (a) Como, $T(k\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(kx_1+y_1,\ kx_2+y_2,\ kx_3+y_3) = (kx_3+y_3,\ -(kx_1+y_1)) = k(x_3,\ -x_1)+(y_3,\ -y_1) = kT(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})$, concluímos que é linear.

(b) Como $T(1,1,1) = (1,1)$ e $T(2,2,2) = (2,4) \neq 2T(1,1,1)$, concluímos que não é linear. ■

Observação 4.2 *É fácil verificar que se* T *é linear, então* $T(\mathbf{0}) = T(-\mathbf{0}+\mathbf{0}) = -T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0}) = 0$*. A recíproca não é verdadeira: existem funções que satisfazem isto mas não são lineares (veja Exemplo 4.3 (b) e Exemplo 4.21 (c) da p.106).*

Definição 4.3 (TL associada a uma matriz) *Dada uma matriz* $m \times n$ $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, definimos* $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *por* $T_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$ *(produto matriz-vetor da Definição 2.19 da p.53).* T_A *é uma transformação linear pelo Lema 2.20 da p.54 (linearidade do produto matriz-vetor).*

Observação 4.3 *Abusando a linguagem dizemos "dada a matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, considere* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*", utilizando o mesmo símbolo para a matriz e para a função. O correto seria dizer "dada a matriz* A*, considere a função* T_A*".*

Exemplo 4.4 *Para cada matriz* B *abaixo determine o domínio, o contradomínio e a transformação linear associada* T_B*.*

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; *(b)* $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; *(c)* $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$; *(d)* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solução: (a) Como são 2 linhas e 3 colunas, $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Utilizando a definição do produto matriz-vetor (Definição 2.19 da p.53),

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 5y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{bmatrix}.$$

É mais fácil (e é o que deve ser feito na prática) usar o Lema 2.22 da p.54 e fazer produto escalar com linhas: $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,2,3)\cdot(x,y,z) \\ (4,5,6)\cdot(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{bmatrix}$. De uma forma ou de outra, concluímos que $T_B(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z)$.

(b) Como são 3 linhas e 2 colunas, $T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_B(x,y) = (2x+3y,\ 5x+6y,\ 3-y)$.

(c) Como são 1 linha e 2 colunas, $T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T_B(x,y) = (-3x-2y)$.

(d) Como são 3 linhas e 1 coluna, $T_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T_B(x) = (2x,\ -2x,\ -3x)$. ■

O próximo lema permite determinar uma TL no espaço todo conhecendo seus valores somente numa base (caso seja finita).

Lema 4.4 (determinando uma TL) *Seja $T : U \to V$ transformação linear e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base de U. Se conhecemos $T(\mathbf{u}_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então $T(\mathbf{u})$ está bem determinado para qualquer $\mathbf{u} \in U$.*

Prova: Dado $\mathbf{u} \in U$ qualquer, pela definição de base, existem $\alpha_i's$ tais que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$. Pela linearidade, $T(\mathbf{u}) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mathbf{u}_i)$. Como os valores $T(\mathbf{u}_i)$ são conhecidos, a transformação está determinada de modo único. ■

Exemplo 4.5 *Determine uma TL satisfazendo em cada caso:*

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0) = (2,-1)$ e $T(0,1) = (3,1)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(1,1) = 2$ e $T(0,1) = 3$.

Solução: *(a) Como $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, pela linearidade, $T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(2,-1) + y(3,1) = (2x+3y,\ y-x)$. (b) Como $(1,1)$ e $(0,1)$ são LIs, formam uma base do $\mathbb{R}^2$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$. Logo, $T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1) = 2x + 3(y-x) = 3y - x$.* ■

Lema 4.5 (bijeção entre matrizes e TLs) *A função da Definição 4.3 que associa a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma bijeção.*

Prova: Vamos provar a injetividade. Suponha que $T_A = T_B$. Logo, dados vetores $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ da base canônica do $\mathbb{R}^n$, temos $T_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i = T_B(\mathbf{e}_i)$ para todo i. Agora, é claro que $A\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna de A pois na combinação linear dos vetores colunas de A vai aparecer somente a i-ésima coluna. Do mesmo modo, $B\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna de B. Concluímos que cada coluna de A é igual a cada coluna de B, isto é, $A = B$, provando a injetividade.

Para a sobrejetividade, considere $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma TL. Defina $\mathbf{v}_i = S(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Defina $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Agora, é claro que $A\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$. Logo $T_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i = S(\mathbf{e}_i)$. Como S e T_A são lineares e assumem os mesmo valores em todos os vetores da base, pelo Lema 4.4 acima, $S = T_A$. ■

Observação 4.4 *Pelo lema acima toda TL do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é dada por uma matriz e vice-versa. Para espaços de dimensão finita, pela Definição 4.49 da p.122, o estudo de TLs pode ser reduzido ao estudo de matrizes.*

Exemplo 4.6 *Determine a matriz associada à TL:*

(a) $T(x,y,z,w) = (x - y + 2z,\ x + y,\ z + w)$;

(b) T que leva cada vetor do $\mathbb{R}^3$ na sua projeção ortogonal no plano xz.

(c) T que leva cada vetor do $\mathbb{R}^3$ na sua rotação em torno do eixo z por um ângulo de 90 graus no sentido anti-horário[1] do plano xy.

Solução: *(a) Calcule $T(1,0,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0,0) = (-1,1,0)$, $T(0,0,1,0) = (2,0,1)$, $T(0,0,0,1) = (0,0,1)$. Colocando estes vetores como colunas da matriz T, obtemos que*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] Orientar sentido de rotações em $\mathbb{R}^3$ é um problema delicado. Neste caso, por se tratar do plano xy, pensamos na orientação usual do plano.

(b) É claro que (porque?) $T(1,0,0) = (1,0,0)$ *(o vetor* $\mathbf{e}_1$ *pertence ao plano* xz*),* $T(0,1,0) = (0,0,0)$ *(o vetor* $\mathbf{e}_2$ *é perpendicular ao plano* xz*),* $T(0,0,1) = (0,0,1)$ *(o vetor* $\mathbf{e}_3$ *pertence ao plano* xz*). Colocando estes vetores como colunas da matriz* T*, obtemos que*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) É claro que (porque?) $T(1,0,0) = (0,1,0)$, $T(0,1,0) = (-1,0,0)$, $T(0,0,1) = (0,0,1)$. *Colocando estes vetores como colunas da matriz* T*, obtemos que*

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

4.1.3 Transformações Lineares Geométricas

Matrizes que representam transformações geométricas como projeção, rotação, reflexão e homotetias (ampliações e reduções) são utilizadas em computação gráfica e para o estudo da geometria das transformações lineares. Este ponto de vista geométrico será retomado na Seção 5.4 da p.148 e na p.199 (veja as figuras!). Deixamos para o leitor verificar que estas transformações geométricas são TLs.

Exemplo 4.7 (exemplos no $\mathbb{R}^2$) *Determine a matriz que:*
(a) amplia todos os vetores por um fator k.
(b) reflete os vetores em torno do eixo x.
(c) projeta (ortogonalmente) os vetores no eixo x.
(d) reflete os vetores em torno da reta $y = -x$.

Solução: *(a)* $A(1,0) = k(1,0) = (k,0)$, $A(0,1) = k(0,1) = (0,k)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kI$. *Para ilustração do caso* $k = 2$ *veja Figura 4.2.*

(b) $A(1,0) = (1,0)$, $A(0,1) = (0,-1)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Para ilustração veja Figura 4.3.*

(c) $A(1,0) = (1,0)$, $A(0,1) = (0,0)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Para ilustração veja Figura 4.4.*

(d) Com auxílio de um desenho, verifique que $A(1,0) = (0,-1)$, $A(0,1) = (-1,0)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 4.8 (exemplos no $\mathbb{R}^3$) *Determine a matriz que:*
(a) projeta (ortogonalmente) os vetores do espaço no plano $z = 0$.
(b) reflete os vetores do espaço em torno do plano $z = 0$.
(c) que projeta (ortogonalmente) os vetores do espaço no plano $y = 0$.

Solução: *(a) Como os vetores que estão no plano* $z = 0$ *tem como imagem eles mesmo,* $A(1,0,0) = (1,0,0)$, $A(0,1,0) = (0,1,0)$. *O vetor* $(0,0,1)$ *quando projetado valerá* $(0,0,0)$. *Logo,* $A(0,0,1) = (0,0,0)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Para ilustração veja Figura 4.5.*

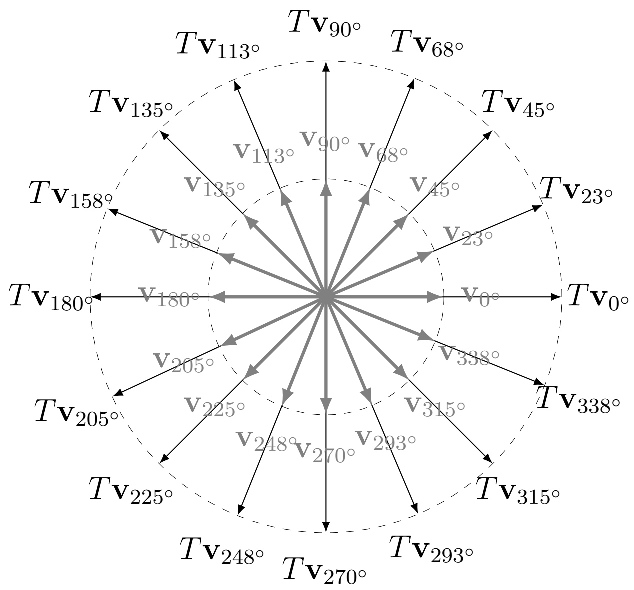


Figura 4.2: Ampliação Uniforme: $A(x, y) = (2x, 2y)$

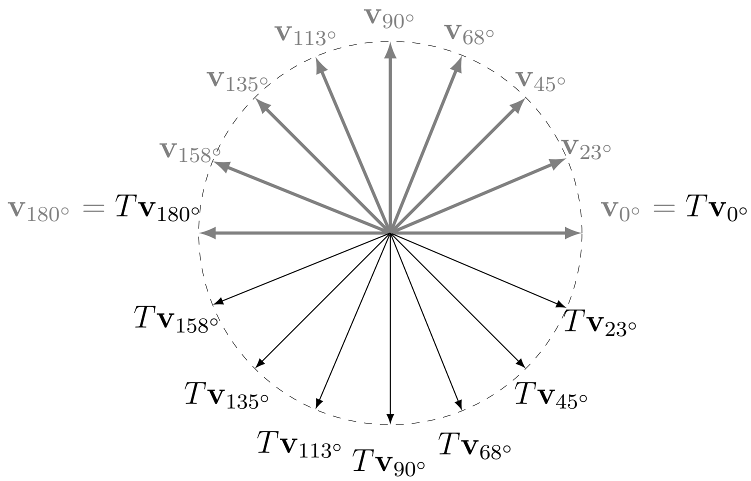


Figura 4.3: Reflexão no eixo x: $A(x, y) = (x, -y)$

(b) Como os vetores que estão no plano $z = 0$ *tem como imagem eles mesmo,* $A(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$. *O vetor* $(0, 0, 1)$ *após reflexão se transformará em* $-(0, 0, 1)$. *Logo,* $A(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Como os vetores que estão no plano $y = 0$ *tem como imagem eles mesmo,* $A(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $A(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. *O vetor* $(0, 1, 0)$ *quando projetado valerá* $(0, 0, 0)$. *Logo,* $A(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$. *Logo,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 4.9 (matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$) *Seja* R *a transformação que roda os vetores do* $\mathbb{R}^2$ *por um ângulo* θ *(no sentido trigonométrico, isto é, anti-horário).*

(a) Mostre que R *é uma TL;* *(b) Determine a matriz* R.

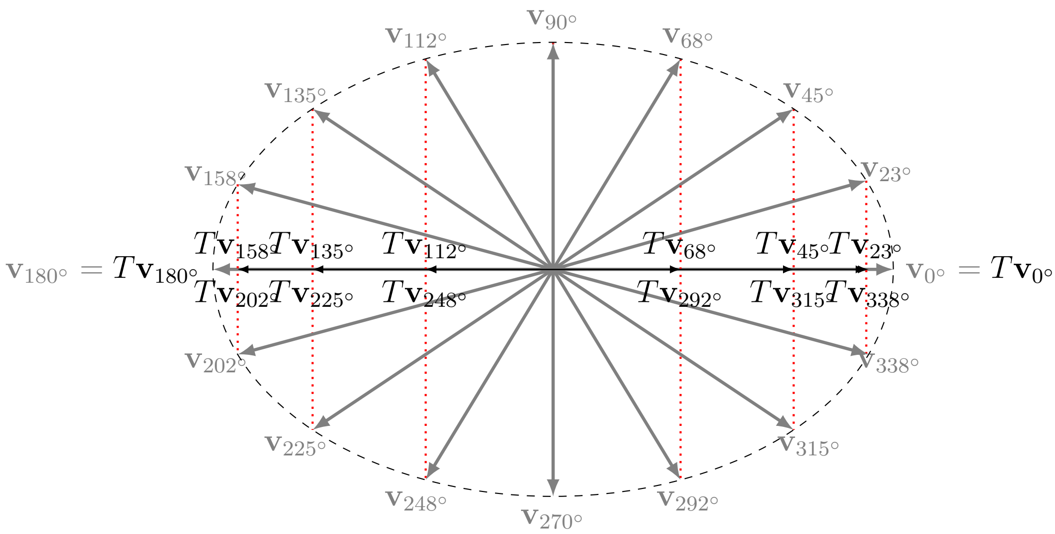


Figura 4.4: Projeção ortogonal no eixo x: $A(x,y) = (x,0)$

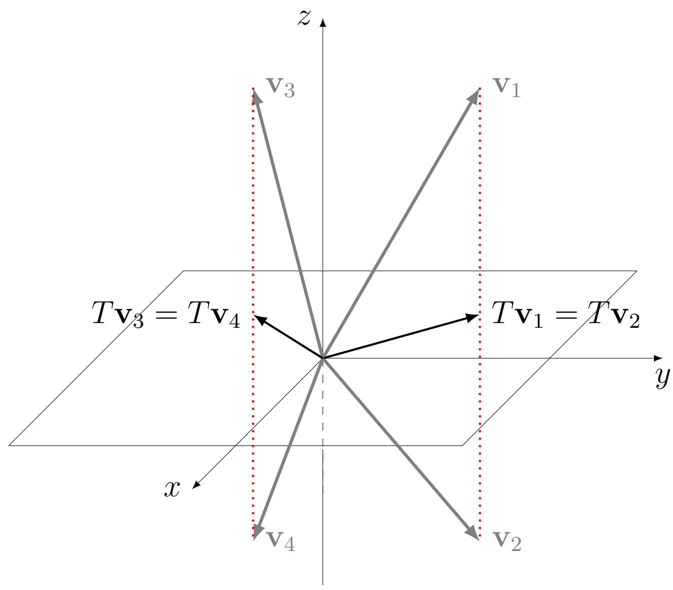


Figura 4.5: Projeção ortogonal no plano $z = 0$: $A(x,y,z) = (x,y,0)$

Solução: *(a) Vamos provar através da sequência da Figura 4.6 que* $R(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v})$*. Na primeira mostramos* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$*. Na segunda,* $R(\mathbf{u}), R(\mathbf{v})$ *e* $R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v})$*. Na terceira mostramos que* $R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v})$ *é igual a rotação de* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$*, isto é que* $R(\mathbf{u})+R(\mathbf{v}) = R(\mathbf{u}+\mathbf{v})$*.*

Argumento análogo vale para a multiplicação por escalar. Como a rotação preserva a soma e o produto por escalar, R *é linear.*

(b) Observe na Figura 4.7 a imagem de $R(\mathbf{e}_1)$ *e* $R(\mathbf{e}_2)$*.*

Logo, $R(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ *e* $R(\mathbf{e}_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$*. Logo,* $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Para ilustração de uma rotação de $23°$ *veja Figura 4.8.* ■

Exemplo 4.10 *Determine uma matriz de rotação que roda os vetores do* $\mathbb{R}^3$ *por um ângulo* θ *em torno do eixo* y*.*

Solução: *Como é em torno do eixo* y*,* $A(0,1,0) = (0,\ 1,\ 0)$ *(vetor no eixo* y *não é modificado). Se a rotação for por ângulo* θ*, uma opção é (veja Exemplo 4.9)* $A(1,0,0) =$

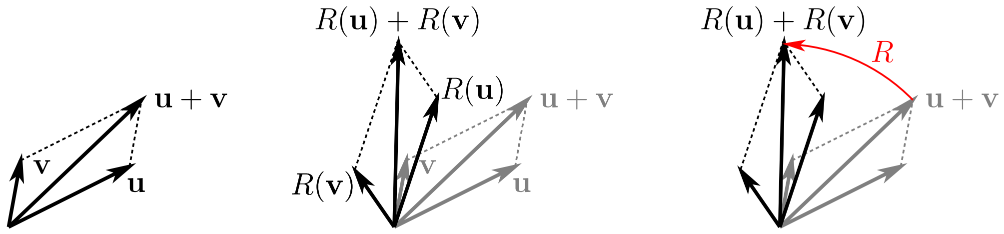


Figura 4.6: Rotação

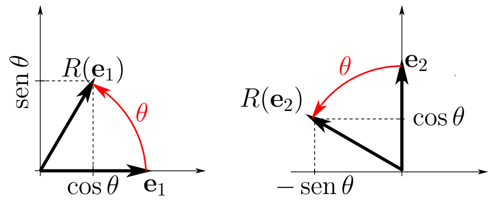


Figura 4.7: Dedução da Matriz de Rotação por ângulo θ.

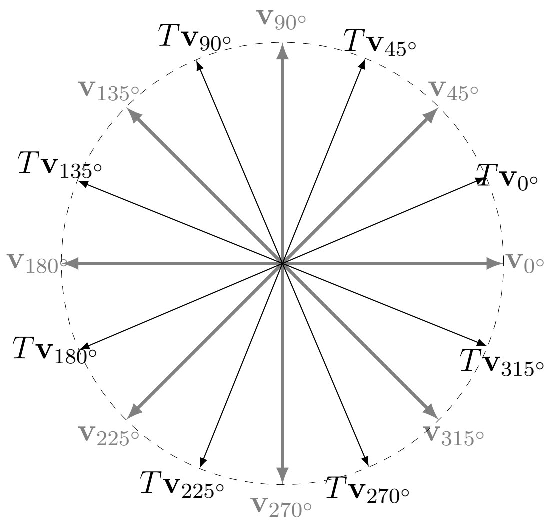


Figura 4.8: Rotação de $23°$

$(\cos\theta,\ 0,\ \operatorname{sen}\theta)$ *e* $A(0,0,1) = (-\operatorname{sen}\theta,\ 0,\ \cos\theta)$. *Logo* $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$. *Outra possibilidade é rodar no outro sentido e* $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$. ■

Observação 4.5 (rotação no espaço de forma geral) *Ver o Desafio 5.10 da p.166 para o caso geral de rotação em* $\mathbb{R}^3$.

4.2 Núcleo e Imagem

4.2.1 Núcleo e Imagem

Definição 4.6 (Núcleo) *(ou **kernel**) de uma transformação linear $T : U \to V$, denotado por $Nuc(T)$, é o conjunto dos vetores do domínio cuja imagem é o vetor nulo:*

$$Nuc(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

Lema 4.7 (núcleo é subespaço) *Dada uma transformação linear $T : U \to V$, o $Nuc(T)$ é subespaço vetorial de U.*

Prova: Deixamos como exercício para o leitor. ∎

Definição 4.8 (Nulidade) *de uma transformação linear T é a dimensão do seu núcleo: $\dim(Nuc(T))$.*

Exemplo 4.11 *Determine o núcleo de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

(a) $T(x, y) = y$; (b) $T(x, y) = y - x$.

Solução: *(a) O núcleo são os elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que são levados no zero. Como $T(x, y) = 0 = y$, o núcleo é a reta $y = 0$, que corresponde ao eixo x. Mais ainda, T leva a reta $y = 1$ no 1 e a reta $y = -1$ no -1, conforme indicado na Figura 4.9.*

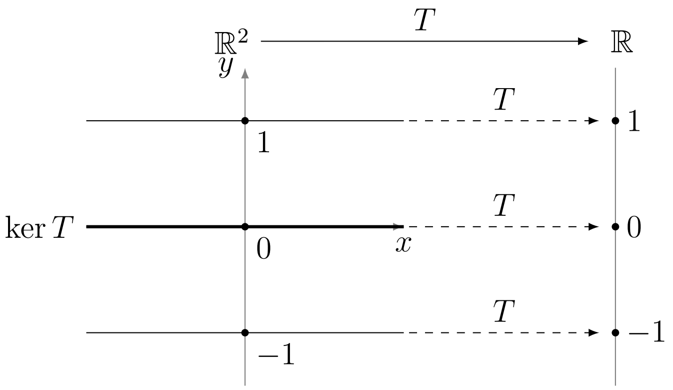


Figura 4.9: $T(x, y) = y$

(b) O núcleo são os elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que são levados no zero. Como $T(x, y) = 0 = y - x$, o núcleo é a reta $y = x$. Mais ainda, T leva a reta $y = x + 1$ no 1 e a reta $y = x - 1$ no -1, conforme indicado na Figura 4.10.

∎

Exemplo 4.12 *Determine uma base e dimensão do núcleo da transformação linear:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *(b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) Para calcular o núcleo temos que resolver o sistema homogêneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para isto, escalonando totalmente A, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. São três variáveis livres e*

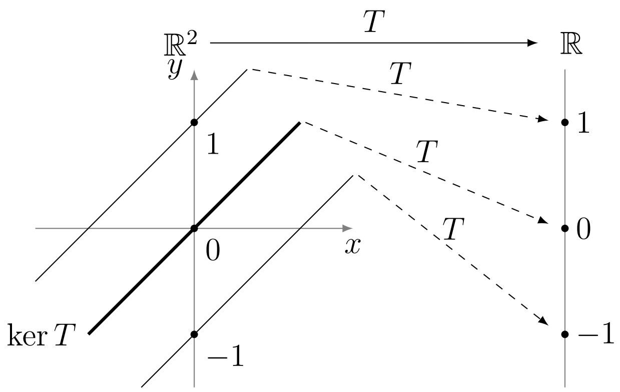


Figura 4.10: $T(x, y) = y - x$

portanto o núcleo tem dimensão 3*. Tomando* r, s, t *como parâmetros, obtemos que o núcleo é* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s-t, s, -t, r, t)$*. Colocando* $r = 1$ *e* $s = t = 0$ *obtemos* $(0, 0, 0, 1, 0)$ *no núcleo. Colocando* $s = 1$ *e* $r = t = 0$ *obtemos* $(-1, 1, 0, 0, 0)$ *no núcleo. Colocando* $t = 1$ *e* $r = s = 0$ *obtemos* $(-1, 0, -1, 0, 1)$ *no núcleo. Portanto, uma base para o* $\mathrm{Nuc}(T)$ *é* $\{(0, 0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, -1, 0, 1)\}$*. Logo* $\dim \mathrm{Nuc}\, A = 3$*.*

(b) Para calcular o núcleo temos que resolver o sistema homogêneo $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$*. Para isto, escalonando totalmente* B*, obtemos* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$*. São duas variáveis livres e portanto o núcleo tem dimensão* 2*. Tomando* s, t *como parâmetros, obtemos que o núcleo é* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, t, s, t)$*. Colocando* $s = 1$ *e* $t = 0$ *obtemos* $(1, 0, 1, 0)$ *no núcleo. Colocando* $t = 1$ *e* $s = 0$ *obtemos* $(0, 1, 0, 1)$ *no núcleo. Portanto, uma base para o* $\mathrm{Nuc}(T)$ *é* $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$*. Logo* $\dim \mathrm{Nuc}\, B = 2$*.* ■

Definição 4.9 (Imagem) *de uma transformação linear* $T : U \to V$*, denotada por* $\mathrm{Im}(T)$*, é o conjunto dos vetores do contra-domínio que são imagem de algum vetor do domínio:*

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \text{ para algum } \mathbf{u} \in U\}.$$

Lema 4.10 (imagem é subespaço) *Dada uma transformação linear* $T : U \to V$*, a* $\mathrm{Im}(T)$ *é subespaço vetorial de* V*.*

Prova: Deixamos como exercício para o leitor. ■

Observação 4.6 *Definimos núcleo e imagem de matriz na Definição 3.7 da p.69. Deixamos para o leitor verificar que se* A *é uma matriz e* $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *a TL associada pela Definição 4.3 da p.93, então* $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(T_A)$ *e* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(T_A)$*.*

Definição 4.11 (Posto) *de uma transformação linear* T *é a dimensão da sua imagem* $\dim(\mathrm{Im}(T))$*.*

Observação 4.7 *O termo* ***nulidade*** *é pouco utilizado, mas o termo* ***posto*** *é muito comum.*

Observação 4.8 (calculando núcleo e imagem de T) *Como obter o **núcleo** e a **imagem** de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?*
*(a) Para o **núcleo** vimos nos exemplos: resolva o sistema $T(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$.*
*(b) Para a **imagem**, escalone (não precisa ser totalmente escalonada, veja Lema 3.15 da p.75) matriz com os vetores $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas para determinar base. Estes vetores geram a imagem de T pois para todo $\mathbf{v}$ no domínio, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i$ e os vetores na imagem $T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\mathbf{e}_i)$.*

Exemplo 4.13 *Determine o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões de:*
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = (x + 2y)$;
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y) = (-x,\ 2y + x,\ -2x + 2y,\ 2y - x,\ 2y)$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z) = (y + z,\ y + z,\ x + z,\ x + z,\ x + z)$.

Solução: *(a) Determinamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y) = \mathbf{0} = x + 2y$. Logo $x = -2y$ e tomando $y = t$, $x = -2t$. Logo $\mathrm{Nuc}(T) = \{(-2t, t)\} = \langle(-2, 1)\rangle$, dimensão 1. Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, a imagem é gerada por $\{T(1, 0), T(0, 1)\} = \{1, 1\}$. Logo a imagem é todo o $\mathbb{R}$, com dimensão 1.*

(b) Determinamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y) = \mathbf{0} = (-x, 2y + x, -2x + 2y, 2y - x, 2y)$; Da primeira equação obtemos $-x = 0$ e da última $2y = 0$. Logo a única solução é $x = y = 0$. Concluímos que o núcleo é o $\mathbf{0}$ (dimensão 0). Como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, a imagem é gerada por $\{T(1, 0), T(0, 1)\} = \{(-1, 1, -2, -1, 0), (0, 2, 2, 2, 2)\}$. Logo a imagem é (estes vetores são claramente LIs) o $\langle(-1, 1, -2, -1, 0), (0, 2, 2, 2, 2)\rangle$, com dimensão 2.

(c) Determinamos o núcleo resolvendo (o sistema linear) $T(x, y, z) = \mathbf{0} = (y + z, y + z, x + z, x + z, x + z)$; Este sistema é equivalente ao sistema $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Escalonando e resolvendo, são duas equações e três variáveis. Tomando $z = t$, obtemos $y = x = -t$. Logo o núcleo é $\{(-t, -t, t)\} = \langle(-1, -1, 1)\rangle$, dimensão 1. Como $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, a imagem é gerada por $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(0, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. Escalonando a matriz com estes vetores em cada linha, observamos que o último é combinação linear dos outros. Logo a imagem é $\langle(0, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0\rangle$, com dimensão 2. ■

Exemplo 4.14 *Determine o núcleo e a imagem somente com argumentos geométricos (sem calcular explicitamente) de:*
(a) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma projeção ortogonal na reta* $x = y$;
(b) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma reflexão em torno da reta* $x = y$.
(c) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma rotação por um ângulo de 27 graus no sentido horário.*

Solução: *(a) Como P projeta na reta $x = y$, a imagem de P é esta reta. Como a projeção é ortogonal, serão levados no zero os vetores perpendiculares a esta reta, isto é, $NucT$ é a reta $x = -y$.*

(b) Dado um vetor $\mathbf{v}$ qualquer, ele é imagem de $\mathbf{w}$ (tome $\mathbf{w} = R(\mathbf{v})$). Logo a imagem é o $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, o único vetor que refletido vai na origem é a própria origem. Logo o núcleo é o subespaço $\{\mathbf{0}\}$.

(c) Dado um vetor $\mathbf{v}$ qualquer, ele é imagem de $\mathbf{w}$ (tome $\mathbf{w}$ a rotação por 27 graus no sentido anti-horário de $\mathbf{v}$). Logo a imagem é o $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, o único vetor que após ser rotacionado vai na origem é a própria origem. Logo o núcleo é o subespaço $\{\mathbf{0}\}$. ■

Observação 4.9 (calculando núcleo e imagem de A) *Dada uma matriz* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, *como determinar o* ***núcleo*** *e a* ***imagem*** *de A?*

(a) Para o ***núcleo*** *vimos nos exemplos anteriores: resolva o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

(b) Para a ***imagem***, *escalone (não precisa ser totalmente escalonada, veja Lema 3.15 da p.75) matriz com os vetores $T_A(\mathbf{e}_j) = A\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$, para $j = 1, \dots, n$ (colunas de A) nas linhas:* $\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{v}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{v}_n \rightarrow \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.15 *Determine uma base e dimensão da imagem da transformação linear:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *(b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) Para calcular imagem temos que escalonar* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Escalonando obtemos,* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$. *Portanto, uma base para a* $\mathrm{Im}(T)$ *é* $\{(2, -1, 1, 0), (0, 3/2, -3/2, 1)\}$, *que possui dimensão* 2.

(b) Para calcular imagem temos que escalonar $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Escalonando obtemos,* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. *Portanto, uma base para a* $\mathrm{Im}(T)$ *é* $\{(1, -1, 0), (0, -1, -1)\}$, *que possui dimensão* 2. ■

4.2.2 Teorema do Núcleo Imagem

O próximo teorema é conhecido como o **Teorema Fundamental da Álgebra Linear** pela sua importância. Ele relaciona as dimensões do núcleo e da imagem com a dimensão do domínio.

Teorema 4.12 (Teorema do núcleo-imagem (TNI)) *Seja $T : U \to V$ linear com U de dimensão finita. Então*

$$\dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(U).$$

Portanto a soma das dimensões do núcleo e da imagem é igual a dimensão do domínio.

Prova: Suponha que $\dim(U) = n$ e que $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = k$. Tome base $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ de $\mathrm{Nuc}(T)$. Tome $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ para que $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ seja base de U. Como $\dim(U) = n$ e toda base possui mesmo número de elementos, $k + r = n$, isto é, $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) + r = \dim(U)$.

Vamos mostrar que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = r$, mais precisamente, vamos mostrar que $\beta = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ forma uma base para $\mathrm{Im}(T)$:

(a) $\langle\beta\rangle = \mathrm{Im}(T)$: É claro que $\langle\beta\rangle \subset \mathrm{Im}(T)$. Vamos mostrar que $\mathrm{Im}(T) \subset \langle\beta\rangle$. Seja $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Então, $\mathbf{w} = T\mathbf{u}$ para algum $\mathbf{u} \in U$. Como γ é base de U, $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots a_k\mathbf{u}_k + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots b_r\mathbf{v}_r$. Como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ é base do núcleo, $T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{w} = T\mathbf{u} = b_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots b_rT(\mathbf{v}_r)$. Portanto $\mathbf{w} \in \langle\beta\rangle$.

(b) β é LI: Suponha que $\sum_i a_iT(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Pela linearidade de T, $T(\sum_i a_i\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Logo $\sum_i a_i\mathbf{v}_i \in \mathrm{Nuc}(T)$. Como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ é base do núcleo, existem b_j tais que $\sum_i a_i\mathbf{v}_i = \sum_j b_j\mathbf{u}_j$. Logo $\sum_i a_i\mathbf{v}_i - \sum_j b_j\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$. Como γ é LI, todos os coeficientes são iguais a zero.

Como β é uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e possui r vetores, $\dim \mathrm{Im}(T) = r$. ■

Observação 4.10 *Como consequência do TNI, caso o núcleo seja trivial (igual a $\{\mathbf{0}\}$) a imagem terá a mesma dimensão que o domínio e portanto a imagem será uma "cópia fiel" do domínio. A dimensão máxima possível para a imagem é a dimensão do domínio: caso o núcleo seja não nulo perdemos dimensão da imagem.*

Exemplo 4.16 *Determine o valor máximo e mínimo possível para a dimensão do núcleo e da imagem de uma TL:*

(a) $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^6$; (b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$; (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{20}$.

Solução: *Sejam $n = \dim Nuc(T), i = \dim Im(T)$. Pelo TNI, $n + i$ é igual a dimensão do domínio. Por outro lado a dimensão da imagem (i) é menor ou igual à dimensão do contra-domínio e a dimensão do núcleo (n) é menor ou igual à dimensão do domínio*

(a) $n + i = 8$ e $i \leq 6$. Como $8 - n = i \leq 6$, n não pode ser 0 ou 1 pois i seria 8 ou 7. Logo $n = 2, \ldots, 8$, $i = 6, \ldots, 0$.

(b) $n + i = 5$ e $i \leq 5$. Logo $n = 0, \ldots, 5$, $i = 5, \ldots, 0$.

(c) $n + i = 4$ e $i \leq 40$. Logo $n = 0, \ldots, 4$, $i = 4, \ldots, 0$. ■

Observação 4.11 *Pelos exemplos acima, como a dimensão da imagem não pode exceder a dimensão do contra-domínio, o núcleo pode ter um mínimo maior que zero.*

Exemplo 4.17 *Explique em cada caso porque não existe uma TL:*

(a) $T : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^{11}$ com $posto(T) = \dim Nuc(T)$;

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ com $Nuc(T) = \langle(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 6)\rangle$.

Solução: *(a) pelo TNI, $posto(T) + \dim Nuc(T) = 11$. Como 11 é ímpar, isto é impossível.*

(b) como o núcleo tem dimensão 2, pelo TNI a imagem teria dimensão 3, maior que a do contradomínio. ■

Exemplo 4.18 *Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja o plano $x + y + z = 0$ e a imagem seja a reta $(x(t), y(t), z(t)) = (0, t, t)$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ e a imagem seja o plano $y + z = 0$.

Solução: *(a) Resolvendo o sistema obtemos que o núcleo é gerado por $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. É claro que acrescentando $(1, 0, 0)$ obteremos uma base do $\mathbb{R}^3$. A imagem deve ser $\langle(0, 1, 1)\rangle$. Utilizando o Lema 4.4 da p.94, fixamos $T(-1, 1, 0) = (0, 0, 0) = T(-1, 0, 1)$. Para garantir a imagem fixamos $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$.*

(b) Resolvendo o sistema $y + z = 0$, a imagem é igual ao $\langle(1, 0, 0), (0, -1, 1)\rangle$. Completando o núcleo com uma base do $\mathbb{R}^4$, consideramos a base $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$. Definimos $T(1, 0, 0, 0) = T(0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (0, -1, 1)$. A TL está bem definida pelo Lema 4.4 da p.94. ■

Definição 4.13 (matriz transposta) *A* ***transposta*** *de uma matriz* $A = (a_{ij})$ *é a matriz* $B = (b_{ij}) = A^T$ *dada por* $b_{ij} = a_{ji},$ para todo i, j. *Se* A *é* $m \times n$, *então* A^T *é* $n \times m$ *e*

$$B = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Note que $(A^T)^T = A$.

A relação entre linhas e colunas com núcleo e imagem motiva a próxima definição.

Definição 4.14 (espaço-linha e espaço-coluna)
O ***espaço-coluna*** *de* A *é o espaço gerado pelas colunas de* A, *isto é, é igual a* $\mathrm{Im}(A)$.
O ***espaço-linha*** *de* A *é o espaço gerado pelas linhas de* A, *isto é, é igual a* $\mathrm{Im}(A^T)$.

Observação 4.12 (Software Algébrico) *Pode-se calcular o* ***espaço-coluna*** *com o comando do Maxima* `columnspace`. *Ver Observação 3.8 da p.75.*

Lema 4.15 (dimensão do espaço linha e coluna) *A dimensão do espaço-linha é igual à dimensão do espaço-coluna, isto é,* $\dim \mathrm{Im}(A^T) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Prova: Considere A com m linhas e n colunas. A dimensão do espaço-coluna é igual a $\dim(\mathrm{Im}(A))$. A dimensão do espaço-linha é o número k de linhas não-nulas após escalonar A. Como o sistema possui n variáveis e foi reduzido a k equações, concluímos que são $n-k$ variáveis livres, isto é, o $\mathrm{Nuc}(A)$ possui dimensão $n-k$. Pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI), $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = n - (n-k) = k$. Ou seja, dimensão do espaço-coluna $= \dim(\mathrm{Im}(A)) = k =$ dimensão espaço-linha. ■

Observação 4.13 *Como consequência deste lema, quando resolvemos um sistema obtemos o posto da matriz (a dimensão de sua imagem) que é igual ao número de linhas não-nulas da matriz escalonada.*

4.2.3 Injetividade, Sobrejetividade e Núcleo

Definição 4.16 (função injetiva, sobrejetiva e bijetiva) *Seja* $f : A \to B$ *uma função. Dizemos que* f *é:*

- ***injetiva*** *se* $f(u) = f(v)$ *implica que* $u = v$. *Cada elemento do contra-domínio é atingido* ***no máximo uma vez****;*
- ***sobrejetiva*** *se* $f(A) = B$. *Cada elemento do contra-domínio é atingido* ***pelo menos uma vez****;*
- ***bijetiva*** *se é injetiva e sobrejetiva. Cada elemento do contra-domínio é atingido* ***exatamente uma vez****.*

Exemplo 4.19 *Determine se é injetiva, sobrejetiva e bijetiva:*
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x) = (x,\ x)$;
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = (x + y)$;

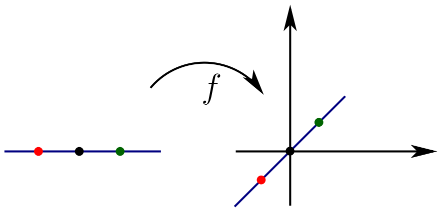


Figura 4.11: Ilustração do Exemplo 4.19.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (-z,\ y)$.

Solução: *(a) Geometricamente esta TL leva a reta $\mathbb{R}$ na reta $y = x$ do $\mathbb{R}^2$ conforme representado na Figura 4.11. É injetiva pois $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad (x, x) = (y, y) \quad \Rightarrow \quad x = y$. Não é sobrejetiva pois, por exemplo, $(1, 2) \neq f(x) = (x, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A imagem é a reta $y = x$. Utilizando o Teorema 4.12 da p.102 (TNI): O núcleo é trivial (verifique!) e portanto a imagem tem dimensão igual ao do domínio: 1.*

(b) Não é injetiva pois, por exemplo, $f(1, 0) = f(0, 1)$. É sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$ (elemento do contra-domínio), existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (por exemplo, $\mathbf{x} = (y, 0)$) tal que $f(\mathbf{x}) = f(y, 0) = y$. A imagem de f é $\mathbb{R}$. Utilizando o Teorema 4.12 da p.102 (TNI): O núcleo tem dimensão 1 (verifique!) e portanto a imagem tem dimensão 1.

(c) Não é injetiva pois, por exemplo, $f(0, 0, 0) = (0, 0) = f(2, 0, 0) = f(3, 0, 0)$. É sobrejetiva pois dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tome $z = -a$ e $y = b$. Logo $f(2,\ b,\ -a) = (a, b)$. Utilizando o Teorema 4.12 da p.102 (TNI): O núcleo tem dimensão 1 (verifique!) e portanto a imagem tem dimensão 2. ■

Lema 4.17 (injetividade e sobrejetividade) *Uma transformação linear $T : U \to V$ é:*

(a) ***injetiva*** *se, e somente se, seu núcleo for igual a $\mathbf{0}$;*

(b) ***sobrejetiva*** *se, e somente se, seu posto ($\dim \operatorname{Im}(T)$) for igual a $\dim(V)$.*

Prova: (a) Como T é linear, $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ se, e somente se, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, se e somente se, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Nuc}(T)$. Logo T é injetiva se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se, e somente se, o $\operatorname{Nuc}(T) = \mathbf{0}$.

(b) Se T for sobrejetiva, $\operatorname{Im}(T) = V$ e portanto, o $\operatorname{posto}(T) = \dim \operatorname{Im}(T) = \dim(V)$. Por outro lado, se o $\operatorname{posto}(T) = \dim \operatorname{Im}(T) = \dim(V)$, então $\operatorname{Im}(T) \subset V$ é um subespaço vetorial de V com mesma dimensão que V. Portanto, $\operatorname{Im}(T) = V$. ■

Corolário 4.18 *Uma transformação linear $T : V \to V$ num espaço de dimensão finita V é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Prova: De fato se T é injetiva, então $\operatorname{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Logo, pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI), $\dim \operatorname{Nuc}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 0 + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$. Logo $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$ e, portanto, $\operatorname{Im}(T) = V$, isto é, T é sobrejetiva.

Se T é sobrejetiva, então $\operatorname{Im}(T) = V$. Como $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$, pelo TNI $\dim \operatorname{Nuc}(T) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(T) = \mathbf{0}$. Portanto o $\operatorname{Nuc}(T) = \mathbf{0}$ e T é injetiva. ■

Exemplo 4.20 *Explique em cada caso porque não existe uma TL:*

(a) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ injetiva; (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sobrejetiva.

Solução: *(a) Como contradomínio tem dimensão 3, a imagem tem no máximo dimensão 3 e pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI) o núcleo tem dimensão no mínimo 4. Para ser injetiva deveria ser igual a $\mathbf{0}$.*

(b) Pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI) a imagem tem no máximo dimensão 2, igual a dimensão do domínio, menor que a dimensão do contradomínio que é 3. ■

4.2.4 Aplicações em Espaços de Funções e Polinômios

Exemplo 4.21 *Considere o espaço $\mathcal{P}_2$ de polinômios de grau máximo 2. Seja $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis e $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas.*

Determine se é linear, injetiva e sobrejetiva cada uma das funções abaixo. Caso seja linear determine o núcleo e a imagem.

(a) $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $D(p) = p'$ (derivada);

(b) $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definida por $D(f) = f'$ (derivada);

(c) $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, definida por $T(p)(x) = (p(x))^2$. Por exemplo se $p(x) = x^2 + 1$, $T(p)(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.

(d) $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por $P(f) = (f(1), f(2))$.

Solução: *(a) Para determinar o núcleo seja $p(x) = ax^2+bx+c$, $D(p)(x) = 2ax+b = 0$ para todo x implica que $a = b = 0$. Logo $Nuc(D)$ são os polinômios $p(x) = c$ (constantes). Esta mesma expressão mostra que a imagem são os polinômios de grau 1 ($\mathcal{P}_1$). Sem fazer contas, o conjunto dos polinômios cuja derivada é a função identicamente nula são os polinômios constantes. A imagem da derivada de polinômios de grau até 2 são polinômios de grau até 1.*

(b) Como $D(k\mathbf{f} + \mathbf{g}) = (k\mathbf{f} + \mathbf{g})' = k\mathbf{f}' + \mathbf{g}' = kD(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g})$, concluímos que é linear.

Como $D(f) = f' = 0$ implica que $f = C$ (constante) (pelo Teorema do Valor Médio), $\ker D$ é igual ao conjunto das funções constantes. Como núcleo é diferente de zero, D não é injetiva.

Dada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, defina $h(x) = \int_0^x g(s)\,ds$. Pelo Teorema fundamental do cálculo $h \in C^1$ e $D(h) = h' = g$. Logo D é sobrejetiva.

(c) Embora $T(0) = 0$, tomando $p(x) = x$ temos $T(kp)(x) = k^2x^2 \neq kT(p)(x) = kx^2$. Logo não é linear.

Por outro lado se tomarmos polinômios constantes iguais a 1 e (-1) observamos que $T(1) = 1 = T(-1)$. Logo não é injetiva.

Para qual p, $T(p)(x) = x$? Para isto teríamos $(p(x))^2 = x$, o que implicaria que $p(x) = \pm\sqrt{x}$. Mas isto não é um polinômio, logo T não é sobrejetiva, pois o polinômio $q(x) = x$ não é atingido nunca por T.

(d) Como $P(kf + g) = ((kf + g)(1), (kf + g)(2)) = (kf(1) + g(1), kf(2) + g(2)) = k(f(1), f(2)) + (g(1), g(2)) = kP(f) + P(g)$, concluímos que é linear.

O núcleo é formado pelas funções f tais que $P(f) = (f(1), f(2)) = (0, 0)$, ou seja, que se anula em 1 e 2. Alguns exemplos de elementos do núcleo: $f(x) = (x - 1)(x - 2)$, $g(x) = (x - 1)^2(x - 2)^3 \operatorname{sen}(x), \ldots$ Não é injetiva pois se $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ e $g(x) = 0$, então $P(f) = P(g) = (0, 0)$ mas $f \neq g$.

É sobrejetiva pois dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, seja $y = f(x)$ a equação da reta que passa por $(1, a)$ e $(2, b)$. Logo $P(f) = (a, b)$. ■

Observação 4.14 (análise numérica) *No exemplo anterior (d) definimos uma projeção que associa a cada função contínua seus valores em dois pontos. O leitor pode generalizá-lo e definir $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ por $P(f) = (f(1), \ldots, f(n))$ e provar que P é uma TL.*
Em análise numérica, fixado um intervalo $[a, b]$, definimos uma projeção que toma os valores da função em $n+1$ pontos equiespaçados neste intervalo. Dado n qualquer, defina $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x = b$ (são $n+1$ pontos). Agora defina $P : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $P(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Novamente P é linear.

Exemplo 4.22 *Representando o polinômio* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *pelo vetor* $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, *determine as matrizes* $D, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e* $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *que associa a cada* p *a:*

(a) *derivada* $Dp = p'$; (b) *derivada segunda* $Sp = p''$; (c) *integral* $Ip = \displaystyle\int_0^2 p(x)\,dx$.

Solução: (a) Como $p'(x) = 2ax + b$, $p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Como $p''(x) = 2a$, $p'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Logo $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $S = D^2$ (faça as contas!) pois a matriz da derivada segunda é igual a aplicar a matriz da derivada 2 vezes.

(c) $Ip = \frac{8}{3}a + 2b + 2c$. Logo $I = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 & 2 \end{bmatrix}$. ■

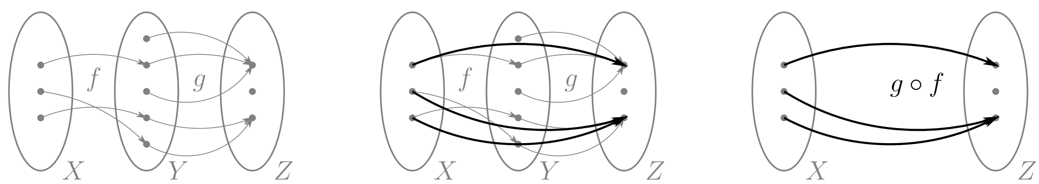
4.3 Composição de Funções e Produto de Matrizes

4.3.1 Composição de Funções e TLs

Nesta seção recordamos a operação de composição de funções e aplicamos ao caso em que as funções são TLs. A composição (de funções e de TLs) não é comutativa de forma geral.

Definição 4.19 (composição de funções) *Dadas* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$, *define-se*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Lema 4.20 (propriedades da composição de funções) *Considere* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *e* $h : Z \to W$.

- *Associatividade:* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.
- *Não comutatividade: em geral,* $g \circ f$ *está bem definido, mas* $f \circ g$ *não está. Mesmo quando* $Z = X$, *caso em que ambas estão definidas,* $g \circ f$ *e* $f \circ g$ *podem diferir.*

Prova: A associatividade da composição deixamos para o leitor. A não comutatividade segue do próximo exemplo. ■

Exemplo 4.23 *Considere* $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ *e* $h(x) = x + 2$. *Determine todas as composições possíveis e quais comutam.*

Solução: *Como* $f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq g(f(x)) = x^2 + 1$, $f \circ g \neq g \circ f$ *(não comuta). Como* $f(h(x)) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 1 \neq h(f(x)) = x^2 + 2$, $f \circ h \neq h \circ f$ *(não comuta). Como* $g(h(x)) = (x+2) + 1 = x + 3 = h(g(x)) = (x+1) + 2$, $f \circ h = h \circ f$ *(comuta).* ■

Da definição de composição de funções em geral, definimos a composição de TLs. O próximo lema mostra que a composição de TLs gera uma TL e é a base da definição do produto de matrizes.

Lema 4.21 (propriedades da composição de TLs) *Sejam S, T, U transformações lineares definidas em espaços vetoriais apropriados para que as composições abaixo façam sentido.*

- *$T \circ S$ é uma transformação linear (composição de TLs é uma TL);*
- *De forma geral $S \circ T \neq T \circ S$ (não é comutativo);*
- *$(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$ (associatividade).*

Prova: De fato, $(T \circ S)(k\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(S(k\mathbf{u} + \mathbf{v})) = T(kS(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})) = kT(S(\mathbf{u})) + T(S(\mathbf{v})) = k(T \circ S)(\mathbf{u}) + (T \circ S)(\mathbf{v})$. A não comutatividade segue do próximo exemplo. A associatividade segue da associatividade da composição de funções. ■

Notação 4.22 *Utilizamos a notação multiplicativa para composição de TLs: $T \circ S$ é escrito como TS.*

Exemplo 4.24 *Considere TLs definidas em $\mathbb{R}^2$:*

- *P projeção ortogonal no eixo x: $P(a, b) = (a, 0)$;*
- *R reflexão em torno da reta $y = x$: $R(a, b) = (b, a)$;*
- *S reflexão em torno do eixo y: $S(a, b) = (-a, b)$.*

Determine todas as composições possíveis e quais comutam.
Solução: *Como $PR(x, y) = P(y, x) = (y, 0)$ e $RP(x, y) = R(x, 0) = (0, x)$, $PR \neq RP$ (não comutam). Como $PS(x, y) = P(-x, y) = (-x, 0)$ e $SP(x, y) = S(x, 0) = (-x, 0)$, $PS = SP$ (comutam).*

Como $RS(x, y) = R(-x, y) = (y, -x)$ e $SR(x, y) = S(y, x) = (-y, x)$, $RS \neq SR$ (não comutam). ■

Exemplo 4.25 *Seja R rotação de 60 graus em torno da origem em $\mathbb{R}^2$. Determine:*
(a) R^6; (b) todos $n \in \mathbb{N}$ tais que $R^n = I$ (identidade).
Solução: *(a) rodar 6 vezes 60 graus equivale a rodar 360 graus. Logo $R^6(x, y) = (x, y)$. (b) Basta que $60n$ seja múltiplo de 360. Logo $n = 6, 12, 18, \ldots$: $n = 6k$ com $k \in \mathbb{N}$.* ■

4.3.2 Produto Matriz-Matriz

A operação de produto entre duas matrizes é provavelmente conhecida dos alunos. Vamos introduzi-la de forma bastante distinta para depois re-interpretá-la de diversos modos, tal qual fizemos com o produto matriz-vetor na Definição 2.19 da p.53 e no Lema 2.22 da p.54.

Dadas matrizes A e B podemos considerar as transformações lineares correspondentes T_A e T_B da Definição 4.3 da p.93. Pelo Lema 4.21 da p.108 (se A e B tiverem dimensões apropriadas) a composição $S = T_A \circ T_B$ é uma TL. Pelo Lema 4.5 da p.94 existe uma **única** matriz C tal que $T_C = S$. Definimos o produto AB como C. Seguem os detalhes na definição abaixo.

Definição 4.23 (produto de matrizes) *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$. Considere T_A, T_B as TLs correspondentes. Por definição $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $T_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Como a composição de TLs é uma TL, $S = T_A \circ T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é TL. Logo existe uma única $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $S = T_C$. Definimos o produto $AB = C \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Teremos então que $S = T_C = T_{AB} = T_A \circ T_B$.*

De forma mais curta, abusando a linguagem, $C = A \circ B$ (composição das TLs correspondentes a A e B).

Observação 4.15

- *As restrições nas dimensões das matrizes A e B para que faça sentido AB decorrem, de forma natural, da definição por composição de TLs: o contradomínio de A deve ser igual ao domínio de B;*
- *A não-comutatividade do produto de matrizes decorre da não-comutatividade da composição de funções lineares;*

A definição acima é elegante mas não mostra como calcular (Veja Observação 6.2 da p.172) o produto matriz-matriz. Este é o conteúdo do próximo lema, que reduz o produto matriz-matriz a produtos matriz-vetor.

Lema 4.24 (produto matriz-matriz) *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times n}$, com $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^p$. Então,*

$$AB = A \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \dots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Prova: Vamos determina quem são as colunas de AB. Para isto, basta aplicar AB em um vetor da base canônica $\mathbf{e}_j$. Note que $T_B(\mathbf{e}_j) = B\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$ (j-ésima coluna de B). Pela Definição 4.23, $T_{AB}(\mathbf{e}_j) = T_A(T_B(\mathbf{e}_j)) = T_A(\mathbf{v}_j) = A\mathbf{v}_j$. Logo a j-ésima coluna de AB é $A\mathbf{v}_j$. ■

Vimos (Definição 2.19 da p.53 e Lema 2.22 da p.54) duas interpretações do produto matriz-vetor:

(a) combinação linear das colunas da matriz, ou

(b) produtos escalares com linhas da matriz.

Vamos ver três interpretações para o produto matriz-matriz.

Lema 4.25 (interpretações do produto matriz-matriz) *Sejam A e B matrizes (de dimensões apropriadas para que esteja definido AB). Então (veja Figuras 4.12–4.14):*

*(a) **colunas** de AB são combinações lineares das colunas de A;*

*(b) **linhas** de AB são combinações lineares das linhas de B;*

*(c) **entradas** de AB são produtos escalares de linhas de A por colunas de B.*

Prova: (a) segue do Lema 4.24 que colunas de AB são produto matriz-vetor de A com colunas de B. Como produto matriz-vetor é CL de colunas de A, segue o resultado. (b) segue de (a) se aplicarmos a transposição de matrizes dos dois lados; (c) segue do Lema 2.19 da p.53 e da interpretação do produto matriz-vetor do Lema 2.22 da p.54. ■

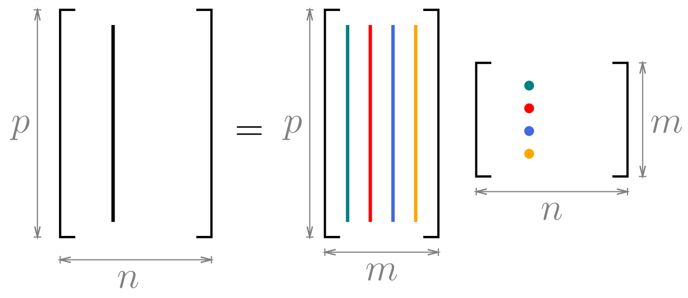


Figura 4.12: Produto Matriz-Matriz: **colunas** de AB são CLs das colunas de A.

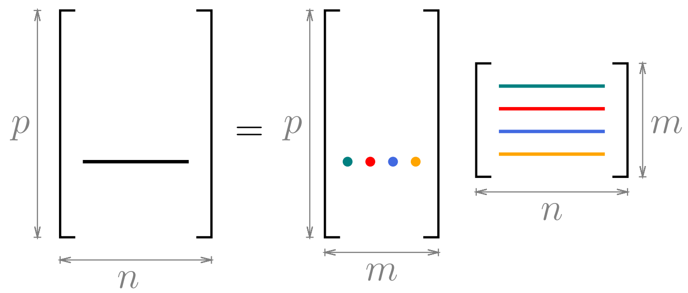


Figura 4.13: Produto Matriz-Matriz: **linhas** de AB são CLs das linhas de B.

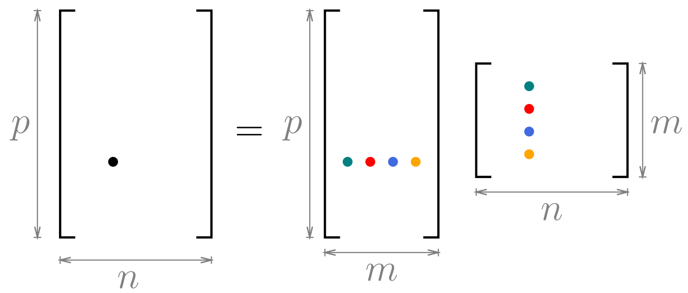


Figura 4.14: Produto Matriz-Matriz: **entradas** de AB são produtos escalares de linhas de A por colunas de B.

Lema 4.26 (propriedades do produto matriz-matriz) *Sejam A, B, C matrizes. Sempre que o produto faça sentido, valerá as seguintes propriedades:*

- *De forma geral $AB \neq BA$ (não-comutativo);*
- *$(AB)C = A(BC) = ABC$ (associatividade);*
- *$AB = \mathbf{0}$ **não implica** que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.*

Prova: A não-comutatividade segue do próximo exemplo. Veja também o Exemplo 4.24 da p.108. A associatividade do produto de matrizes segue da associatividade da composição de TLs (Lema 4.21 da p.108). Ao contrário do que ocorre com números reais, onde $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$, isto não vale para matrizes. Veja o próximo exemplo. ■

Exemplo 4.26 *Considere* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Mostre que* $AB \neq BA$ *e que* $BA = \mathbf{0}$ *embora ambas matrizes sejam não nulas.*

Solução: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

4.4 Função e Matriz Inversa

4.4.1 Função Inversa e TLs

Recordamos a definição de função inversa e obtemos propriedades de inversas de TLs. Podemos inverter somente funções (e TLs) que são bijetivas.

Definição 4.27 (Função Inversa) *Seja* $f : X \to Y$ *uma função bijetiva. Dado* $y \in Y$*:*
(a) sobrejetividade garante que existe $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$*;*
(b) injetividade garante a unicidade de tal x*.*
Fica bem definida a **inversa** *de* f*, denotada por* $f^{-1} : Y \to X$*, definida como* $f^{-1}(y) = x$*.*

Figura 4.15: Função $f : X \to Y$ e Função Inversa $f^{-1} : Y \to X$.

Como funções bijetivas possuem inversas, usaremos, indistintamente, os termos **bijetiva** e **invertível**.

Exemplo 4.27 *Determine a inversa (em domínios apropriados) de:*
(a) $f(x) = x^3$*;* *(b)* $f(x) = 10^x$*;* *(c)* $f(x) = \cos(x)$*.*

Solução: *(a)* $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$*, para* $y \geq 0$*, pois* $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ *e* $\sqrt[3]{x^3} = x$*. Um* $\boxed{\textbf{erro comum}}$ *é dizer que a inversa é* $g(y) = 1/y^3$*.*
(b) $f^{-1}(y) = \log_{10}(y)$ *pois* $\log_{10}(10^x) = x$ *e* $10^{\log_{10}(y)} = y$*.*
(c) $f^{-1}(y) = \arccos(y)$ *pois* $\cos(\arccos(y)) = y$ *e* $\arccos(\cos(x)) = x$*. Um* $\boxed{\textbf{erro comum}}$ *é dizer que a inversa é* $g(x) = 1/\cos(x)$*.* ■

Lema 4.28 (propriedades da função inversa) *Seja* $f : X \to Y$ *uma função bijetiva.*
(a) $f(f^{-1}(y)) = y$ *para todo* $y \in Y$*;* *(b)* $f^{-1}(f(x)) = x$ *para todo* $x \in X$*.*

Prova: Imediata pela definição da inversa. ■

Lema 4.29 (inversa da composta) *Se* $f : Y \to Z$ *e* $g : X \to Y$ *são invertíveis, então* $f \circ g$ *também o é e* $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$*.*

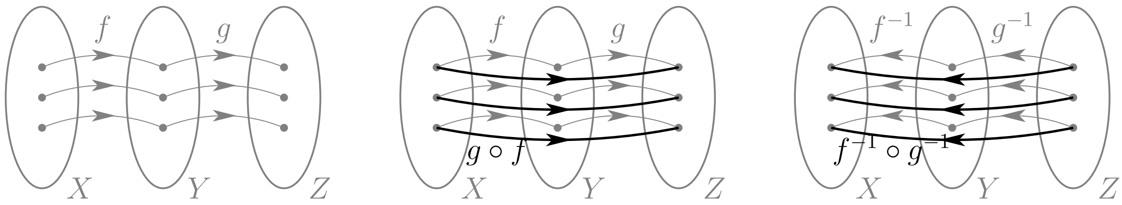


Figura 4.16: Inversa da Função Composta.

Prova: Basta observar a Figura 4.16. ∎

Vamos agora particularizar para o caso em que a função é uma TL. Para isto precisamos que ela seja uma bijeção.

Lema 4.30 (propriedades da inversa de TL) *Sejam $S, T : U \to V$ transformações lineares bijetivas (invertíveis), então:*
(a) T^{-1} é linear; *(b) $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.*

Prova: (a) Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1 = T^{-1}(\mathbf{v}_1), \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{v}_2)$.
Então, pela linearidade de T, $T(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) = \alpha T(\mathbf{u}_1) + \beta T(\mathbf{u}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$.
Logo $T^{-1}(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = T^{-1}(T(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2)) = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = \alpha T^{-1}(\mathbf{v}_1) + \beta T^{-1}(\mathbf{v}_2)$.
(b) Segue pelo Lema 4.29. ∎

Teorema 4.31 (inversa e o núcleo) *Suponha V de dimensão finita. Se $T : V \to V$, então T é invertível se, e somente se, $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.*

Prova: Se T é invertível, então é injetiva e pelo Lema 4.17 da p.105 o núcleo é nulo.

Suponha que $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Pelo Lema 4.17 da p.105, T é injetiva. Pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI), $\dim(V) = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ (pois $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 0$). Logo T é sobrejetiva. Como T é injetiva e sobrejetiva segue que T é uma bijeção e portanto é invertível. ∎

Exemplo 4.28 *Determine, se for possível, a inversa das transformações geométricas em $\mathbb{R}^2$:*
(a) rotação de 25 graus; *(b) reflexão em torno da reta $2x - 3y = 0$;*
(c) projeção ortogonal na reta $5x - 2y = 0$.

Solução: *(a) inversa é rotação de $360 - 25 = 335$ graus pois rodar 25 graus e depois rodar 335 graus equivale a rodar 360 graus, isto é, ficar parado.*

(b) inversa é refletir novamente em torno da mesma reta ($2x - 3y = 0$) pois duas reflexões seguidas cancelam uma a outra;

(c) não possui inversa pois os vetores perpendiculares à reta $5y - 2y = 0$ farão parte do núcleo; como ele é não-trivial, esta TL não possui inversa pelo Teorema 4.31. ∎

4.4.2 Matriz Inversa

Definição 4.32 (matriz identidade) *Definimos como **matriz identidade** I a matriz que corresponde à TL identidade $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. I é uma matriz diagonal com n 1's na diagonal (vetores da base canônica em cada coluna):*

$$I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 4.33 (matriz inversa e singular) *Diz-se que uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é **invertível** se existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Neste caso dizemos que B é a **matriz inversa** de A e denota-se B por A^{-1} (a unicidade é provada no próximo lema).*

*Caso $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ não seja invertível dizemos que A é **singular**.*

Lema 4.34 (propriedades da inversa) *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Então:*

(a) Inversa de A é única;

(b) $AB = I$ se, e somente se, $BA = I$, se e somente se $B = A^{-1}$;

(c) Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Prova: (a) Suponha que C e B são inversas de A. Então $AC = I$ e $BA = I$. Logo, $(BA)C = IC = C$ e pela associatividade do produto de matrizes (Proposição 4.26) $B(AC) = BI = B = C$.

(b) Se $AB = I$, então A é sobrejetiva pois $A(B\mathbf{v}) = I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$. Pelo Corolário 4.18 da p.105 A é uma bijeção e portanto existe inversa A^{-1}. Pela unicidade da inversa, $A^{-1} = B$. Deixamos o resto para o leitor.

(c) Aplique o Lema 4.30 para provar que AB é invertível e a fórmula dada. ■

Exemplo 4.29 *Podemos calcular $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ resolvendo o sistema (porque?) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim, $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.*

Lema 4.35 (núcleo e inversa de matriz) *A matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $Nuc(A) = \mathbf{0}$.*

Prova: Aplique o Teorema 4.31 da p.112 à TL associada T_A. ■

Antes de apresentar o algoritmo do cálculo de matriz inversa, vamos mostrar como **resolver simultâneamente** sistemas lineares com mesma matriz de coeficientes mas com lado direito distinto.

Exemplo 4.30 (resolvendo sistemas lineares simultaneamente) *Resolva os sistemas $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$ de forma independente e simultaneamente.*

Solução: *De forma independente calculamos*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

determinando a solução do primeiro sistema ($x = 2, y = 1$), e depois calculamos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

determinando a solução do segundo sistema ($x = 1, y = -1$).

*Podemos **resolver simultaneamente** os dois sistemas aumentando a matriz com vários lados direitos de uma vez. Desta forma calculamos*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 9 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

para obter a solução dos dois sistemas com um escalonamento. ■

Teorema 4.36 (algoritmo para calcular matriz inversa) *Seja A uma matriz quadrada.*
(a) Monte matriz estendida $[A|I]$;
(b) Escalone totalmente até obter a matriz identidade no lado esquerdo.
Caso isto seja possível, a inversa aparecerá do lado direito: $[I|A^{-1}]$.

Prova: Pelo Lema 4.34 basta determinar $B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ tal que $AB = I$. Como $I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, queremos que

$$AB = A \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \dots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Para isto temos que resolver n sistemas do tipo $A\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ para $i = 1, \dots, n$. No Exemplo 4.30 vimos como resolver simultaneamente sistemas cujo lado esquerdo é o mesmo. Monte a matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|cc} & \uparrow & \uparrow \\ A & \mathbf{e}_1 \cdots & \mathbf{e}_n \\ & \downarrow & \downarrow \end{array}\right] = [A|I]$ e escalone-a totalmente, obtendo a matriz identidade à esquerda e a solução dos sistema no lado direito. Desta forma, após o escalonamento total, obtemos

$$\left[\begin{array}{c|cc} & \uparrow & \uparrow \\ A & \mathbf{e}_1 \cdots & \mathbf{e}_n \\ & \downarrow & \downarrow \end{array}\right] = [A|I] \sim \left[\begin{array}{c|cc} & \uparrow & \uparrow \\ I & \mathbf{v}_1 \cdots & \mathbf{v}_n \\ & \downarrow & \downarrow \end{array}\right] = [I|B] = [I|A^{-1}].$$

■

Exemplo 4.31 *Determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.*

Solução: *Escalonando totalmente $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$, obtemos $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$. Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.* ■

Observação 4.16 (Software Algébrico) *Pode-se calcular a **matriz inversa** com o comando do Maxima `invert`. Entramos a matriz com `M: matrix( [1,-2], [1,1]);` e invertemos com `invert(M);`.*

4.5 Álgebra das Matrizes e TLs

4.5.1 Álgebra de Matrizes

Nesta seção vamos introduzir operações de soma e produto por escalar de matrizes e TLs. Munido destas operações o conjunto das matrizes e o das TLs formam um espaço vetorial.

Vamos começar definindo as operações de soma e produto por escalar de matrizes. Faremos isto utilizando as definições correspondentes (ver Definição 1.2 da p.2 e Definição 1.4 da p.2) em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.37 (soma de matrizes e multiplicação por escalar) *Sejam k um escalar e matrizes A, B $m \times n$ cujas colunas são compostas por vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ e $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, isto é,*

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Define-se $A + B = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ e $kA = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (k\mathbf{a}_1) & \cdots & (k\mathbf{a}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$.

Observação 4.17 *O sinal "$+$" (mais) dentro da matriz e entre as matrizes tem significado distinto: trata-se de soma de vetores, num caso, e de soma de matrizes, no outro. A mesma observação vale para o produto kA.*
A definição usual destas operações é, componente a componente, $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ e $(kA)_{ij} = ka_{ij}$. mas nossa apresentação é mais elegante.

Lema 4.38 (espaço vetorial das matrizes) *O conjunto das matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}$ (Definição 2.2 da p.30) munido com as operações da Definição 4.37 é um espaço vetorial.*

Prova: Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ pode ser vista como um vetor em $\mathbb{R}^{mn}$ com entradas (a_{ij}). Vista deste modo, com operações definidas componente a componente, $\mathcal{M}_{m\times n}$ é igual a $\mathbb{R}^{mn}$. Como já sabemos que $\mathbb{R}^{mn}$ é um espaço vetorial, $\mathcal{M}_{m\times n}$ é um espaço vetorial. ■

Lema 4.39 (propriedades das operações com matrizes) *Dadas matrizes A, B, C e escalar k, sempre que o produto faça sentido, valerão as seguintes propriedades:*

(a) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ (associativa),
(b) $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva),
(c) $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva),
(d) $(AB)^T = B^T A^T$,
(e) Se A é matriz quadrada e I matriz identidade de mesmo tamanho, $AI = IA = A$.

*Dizemos que a matriz identidade é o **elemento neutro** para o produto de matrizes.*

Prova: Por ser enfadonha será omitida. Pode ser feito por aplicações apropriadas do Lema 2.20 da p.54 e Lema 4.24 da p.109 ou calculando todas entradas das matrizes. ■

Finalizamos esta Seção com definições úteis para a Seção Autovalores e Autovetores (matriz simétrica) e para Seção Produto Interno (matriz ortogonal).

Definição 4.40 (matriz simétrica) *Dizemos que A é **simétrica** se $A = A^T$.*

A matriz tem que ser, necessariamente, quadrada para ser simétrica.

Exemplo 4.32 *São simétricas:* $\begin{bmatrix} k_1 & a & b \\ a & k_2 & c \\ b & c & k_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

Definição 4.41 (matriz ortogonal) *Dizemos que Q é **ortogonal** se $Q^T Q = I$ (identidade).*

Exemplo 4.33 *São ortogonais:* $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$.

4.5.2 $\star$Álgebra das TLs[1]

Definição 4.42 (conjunto das TLs) *Dados U e V espaços vetoriais denotamos por $\mathcal{L}(U;V)$ o conjunto das transformações lineares $T : U \to V$.*

Definição 4.43 (operações entre TLs) *Dados $T, S \in \mathcal{L}(U;V)$ e k escalar, definimos a soma de TLs e a sua multiplicação por escalar por:*

$$\begin{array}{rccc} T+S: & U & \to & V \\ & \mathbf{u} & \mapsto & T(\mathbf{u})+S(\mathbf{u}) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} kT: & U & \to & V \\ & \mathbf{u} & \mapsto & kT(\mathbf{u}) \end{array}.$$

Observação 4.18 *O sinal "+" (mais) em "$T + S$" e "$T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u})$" (bem como do produto) possui significado distinto em cada expressão: soma de TLs, num caso, e soma de vetores no outro. Compare estas definições com as da Definição 3.18 da p.77 e veja que são iguais.*

Lema 4.44 (espaço vetorial das TLs) *O conjunto $\mathcal{L}(U;V)$ munido das operações da Definição 4.43 é um espaço vetorial.*

Prova: É claro que $\mathcal{L}(U;V) \subset \mathcal{F}(U;V)$ (toda transformação linear é uma função). Deixo para leitor mostrar que $\mathcal{F}(U;V)$ é um espaço vetorial (dica: Ver da Definição 4.43) Portanto, pelo Lema 3.6 da p.67, basta verificar que $\mathcal{L}(U;V)$ é fechado com relação às operações de soma e produto por escalar.

De fato, sejam $T, S \in \mathcal{L}(U;V)$. Então $(T+S)(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) =$ (linearidade de T e S) $T(\mathbf{u}) + \lambda T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}) + \lambda S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u}) + \lambda(T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v}))$ $= (T+S)(\mathbf{u}) + \lambda(T+S)(\mathbf{v})$. Logo $T+S$ é uma TL, isto é, $T+S \in \mathcal{L}(U;V)$ (fechado pela soma).

De forma análoga, $(kT)(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = kT(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) =$ (linearidade de T) $= kT(\mathbf{u}) + k\lambda T(\mathbf{v}) = (kT)(\mathbf{u}) + \lambda(kT)(\mathbf{v})$. Logo kT é uma TL, isto é, $kT \in \mathcal{L}(U;V)$ (fechado pelo produto).

Como $\mathcal{L}(U;V)$ é fechado com relação às operações de soma e produto por escalar é um espaço vetorial. ■

Observação 4.19 *No Desafio 4.14 da p.135 pede-se para determinar uma base para $\mathcal{L}(U;V)$ e uma prova que $\dim(\mathcal{L}(U;V)) = \dim(U)\dim(V)$ caso U, V sejam espaços vetoriais de dimensão finita.*

Lema 4.45 (propriedades da composição de TLs) *Dadas TLs S, T, U e escalar k, sempre que a composição faça sentido, valerão as seguintes propriedades:*

(a) $(kS) \circ T = S \circ (kT) = k(S \circ T)$ *(associativa)*
(b) $S \circ (T + U) = S \circ T + S \circ U$ *(distributiva);*
(c) $(S + T) \circ U = S \circ U + T \circ U$ *(distributiva);*

Prova: Deixamos para o leitor. ■

[1] A leitura desta subseção é opcional.

4.6 Matriz em Blocos

Já vimos como operar uma matriz por colunas ou linhas (veja a Definição 2.19 da p.53 e o Lema 4.24 da p.109). Podemos generalizar para blocos de tamanho qualquer. É muito importante em linguagens de programação moderna (Fortran 2000 e Python por exemplo) e em programas de computação científica (Scilab e Matlab por exemplo) interpretar o produto e soma de matrizes por blocos.

Exemplo 4.34 (matriz em blocos) *Considere a matriz* $A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$ *e defina por* A_{ij} *cada um destes blocos:* $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$. *Mostre que:*
$A^2 = AA = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ \hline A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} \end{array}\right]$.

Solução: *Verifique que as dimensões permitem calcular todas as operações. Depois faça a conta. Deixamos detalhes para o leitor.* ■

O próximo lema mostra que operamos com os blocos como se fossem números, com o único cuidado de manter a ordem nos produtos pois o produto de matrizes não é comutativo. Apresentamos a divisão em 4 blocos mas podemos dividir num **número arbitrário de blocos**. Veja como inverter uma matriz de bloco qualquer na `Wikipedia: Matriz inversa`.

Lema 4.46 (soma e produto de matrizes por blocos) *Sejam* A *e* B *matrizes divididas em blocos com* $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$ *e* $B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$.

Seja $k \in \mathbb{R}$, $kA = \left[\begin{array}{c|c} kA_{11} & kA_{12} \\ \hline kA_{21} & kA_{22} \end{array}\right]$.

Caso o tamanho dos blocos sejam compatíveis para que as somas que aparecem na fórmula sejam possíveis, $A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right]$.

Caso o tamanho dos blocos sejam compatíveis para que os produtos que aparecem na fórmula sejam possíveis, $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$.

Prova: Consulte a literatura. ■

Exemplo 4.35 *Suponha* $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ *tal que* $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ *com* $B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ *invertíveis. O* 0 *significa uma matriz com todas as entradas nulas de tamanho apropriado. Determine:*
(a) A^2; *(b)* A^{-1}.

Solução: *(a)* $A^2 = AA = \begin{bmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{bmatrix}$. *(b)* $A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$ *pois* $AA^{-1} = \begin{bmatrix} BB^{-1} & 0 \\ 0 & CC^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$. ■

Exemplo 4.36 *Suponha* A, B, C *quadradas,* I *matriz identidade com a dimensão correta em cada caso. Defina* $J = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. *Determine:*

(a) J^2; *(b)* $2J$; *(c)* $K+L$; *(d)* KL; *(e)* LK.

Solução: *(a)* $J^2 = \begin{bmatrix} A^2 & AB+BD \\ 0 & C^2 \end{bmatrix}$. *(b)* $2J = \begin{bmatrix} 2A & 2B \\ 0 & 2C \end{bmatrix}$.

(c) $K+L = \begin{bmatrix} A+I & 0 \\ 0 & B+I \end{bmatrix}$. *(d) e (e)* $KL = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = LK$. ■

4.7 ⋆Matriz Representando Vetor: Coordenadas[1]

Definição 4.47 (coordenadas) *Seja V um espaço vetorial (de dimensão finita) com base $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$. As **coordenadas** do vetor $\mathbf{v} \in V$ na base β (conjunto ordenado) são os coeficientes α_i's (únicos pela Definição 3.11 da p.73) usados para combinar linearmente os vetores $\mathbf{b}_i$'s de forma a gerar $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$. Denotamos pela matriz de uma coluna:*

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}.$$

A função $\begin{array}{rccc} [\,\cdot\,]_\beta : & V & \to & \mathcal{M}_{n\times 1} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & [\mathbf{v}]_\beta \end{array}$ associa a cada vetor suas coordenadas na base β.

Exemplo 4.37 *Dados a base canônica $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 3, \dots, n)$ determine $[\mathbf{v}]_\varepsilon$.*

Solução: *Como $\mathbf{v} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \cdots + n\mathbf{e}_n$ concluímos que $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$.* ■

Exemplo 4.38 *Considere o vetor $\mathbf{v} = (2,4) \in \mathbb{R}^2$ e as bases $\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$. Determine $[\mathbf{v}]_\varepsilon$ e $[\mathbf{v}]_\beta$.*

Solução: *Como $(2,4) = 2(1,0) + 4(0,1)$, então $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Queremos $(2,4) = a(1,1) + b(0,1)$, ou seja, $2 = a, 4 = a + b$. Logo $b = 2$ e $(2,4) = 2(1,1) + 2(0,1)$ e $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Mostramos na Figura 4.17 porque o **mesmo** vetor pode possuir coordenadas distintas em bases distintas.* ■

Exemplo 4.39 *Considere a base $\beta = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e o vetores $\mathbf{v} = (1,2,2)$ e $\mathbf{w} = (1,1,0)$. Determine $[\mathbf{v}]_\varepsilon$, $[\mathbf{v}]_\beta$, $[\mathbf{w}]_\varepsilon$ e $[\mathbf{w}]_\beta$.*

Solução: *É claro que (reveja exemplos anteriores) $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

[1] A leitura desta seção é opcional.

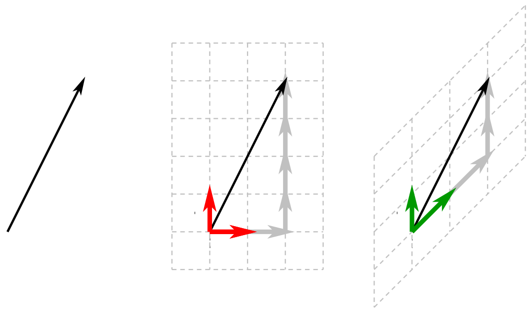


Figura 4.17: Vetor $\mathbf{v} = (2,4)$ em bases distintas

Queremos $(1,2,2) = a(1,1,1)+b(0,1,1)+c(0,0,1)$. *Logo* $1 = a, 2 = a+b, 2 = a+b+c$. *Logo* $b = 1$ *e* $c = 0$. *Logo* $(1,2,2) = 1(1,1,1)+1(0,1,1)+0(0,0,1)$ *e* $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Queremos $(1,1,0) = a(1,1,1)+b(0,1,1)+c(0,0,1)$. *Logo* $1 = a, 1 = a+b, 0 = a+b+c$. *Logo* $b = 0$ *e* $c = -1$. *Como* $(1,1,0) = 1(1,1,1)+0(0,1,1)-1(0,0,1)$, *então* $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Como* $[\mathbf{w}]_\varepsilon = [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, *vetores* ***distintos*** *podem possuir as* ***mesmas*** *coordenadas em bases distintas.* ■

Exemplo 4.40 *Considere a base* β *do Exemplo 3.21 da p.73 e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. *Determine* $[\mathbf{v}]_\beta$.
Solução: *Da solução do Exemplo 3.21 da p.73,* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + (v_2 - v_1)\mathbf{b}_2 + \cdots + (v_n - v_{n-1})\mathbf{b}_n$. *Portanto:*

$$[\mathbf{v}]_\beta = \Big[(v_1, v_2, \dots, v_n)\Big]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ \vdots \\ v_n - v_{n-1} \end{bmatrix}.$$

■

Estes dois exemplos mostram como determinar as coordenadas de um vetor numa base qualquer dadas suas coordenadas na base canônica e vice-versa. Um caso é direto, o outro envolve resolver um sistema linear. Para passar de uma base α para base β, basta passar pela base ε: $[\mathbf{v}]_\alpha \to [\mathbf{v}]_\varepsilon \to [\mathbf{v}]_\beta$.

Exemplo 4.41 *Considere a base* $\beta = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (2,0,-1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Determine:*

(a) $\mathbf{v}$ *sabendo que* $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$; *(b)* $[(4,3,7)]_\beta$.

Solução:

(a) Efetuando, $\mathbf{v} = 2(1,1,1) + 3(1,0,1) - (2,0,-1) = (3,2,6)$

(b) Precisamos determinar $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *tais que* $a_1(1,1,1) + a_2(1,0,1) + a_3(2,0,-1) = (4,3,7)$. *Expandindo, obtemos o sistema linear:* $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 1a_1 & + & 1a_2 & + & 2a_3 & = & 4 \\ 1a_1 & + & 0a_2 & + & 0a_3 & = & 3 \\ 1a_1 & + & 1a_2 & + & (-1)a_3 & = & 7 \end{array}\right.$.

Escalonando $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. *Portanto a solução é única com* $(a_1, a_2, a_3) = (3, 3, -1)$. *Portanto,* $[(4,3,7)]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. ∎

Observação 4.20 (coordenadas com base ortogonal) *Vamos ver que se a base é ortogonal (Definição 5.9 da p.140) podemos obter facilmente as coordenadas do vetor com relação à esta base, os chamados coeficientes de Fourier, pelo Corolário 5.27 da p.160.*

Exemplo 4.42 *Considere* $V = \mathcal{P}_2$ *(polinômios de grau até 2), a base* $\varepsilon = \{1,\ x,\ x^2\}$*, a base* $\beta = \{1+x,\ 1-x,\ x^2\}$*, e os vetores (polinômios que são elementos de* $\mathcal{P}_2$*)* $\mathbf{u} = 8$*,* $\mathbf{v} = 6 + 5x^2$ *e* $\mathbf{w} = 8x - 2$*. Determine:*

(a) $[\mathbf{u}]_\varepsilon$*, (b)* $[\mathbf{v}]_\varepsilon$*, (c)* $[\mathbf{w}]_\varepsilon$*, (d)* $[\mathbf{u}]_\beta$*, (e)* $[\mathbf{v}]_\beta$*, (f)* $[\mathbf{w}]_\beta$*.*

Solução: *(a) Como* $\mathbf{u} = 8 + 0x + 0x^2$*,* $[\mathbf{u}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*. (b) Como* $\mathbf{v} = 6 + 0x + 5x^2$*,* $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$*, (c) Como* $\mathbf{w} = -2 + 8x + 0x^2$*,* $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$*.*

(d) Queremos $8 = a(1+x) + b(1-x) + cx^2$*. Expandindo* $8 = a + b + (a-b)x + cx^2$*. Logo* $a + b = 8, a - b = 0, c = 0$*. Logo* $a = b = 4$*. Como* $8 = 4(1+x) + 4(1-x)$*,* $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$*.*

(e) Queremos $6 + 5x^2 = a(1+x) + b(1-x) + cx^2$*. Expandindo* $6 + 5x^2 = a + b + (a-b)x + cx^2$*. Logo* $a + b = 6, a - b = 0, c = 5$*. Logo* $a = b = 3$*. Como* $6 + 5x^2 = 3(1+x) + 3(1-x) + 5x^2$*,* $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$*.*

(f) Queremos $8x - 2 = a(1+x) + b(1-x) + cx^2 = a + b + (a-b)x + cx^2$*. Logo* $c = 0$ *e temos que resolver o sistema* $\left\{\begin{array}{rcr} a + b & = & -2 \\ a - b & = & 8 \end{array}\right.$*. Resolvendo obtemos* $a = 3, b = -5$*. Logo* $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$*.* ∎

Exemplo 4.43 *Considere* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *(funções reais),* $\beta = \{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ *e* $\gamma = \{1, \operatorname{sen}^2(x)\}$*. Considere os vetores (funções que são elementos de* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$*)* $\mathbf{u} = \cos^2(x)$*,* $\mathbf{v} = \cos(2x)$ *e* $\mathbf{w} = 1$*. Seja* $W = \langle\beta\rangle \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *o subespaço gerado por* β*. Prove que:*

(a) $W = \langle\gamma\rangle$ *(espaço gerado por* γ*); (b)* β *e* γ *são LIs; (c)* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle\gamma\rangle$*.*

Determine:

(d) $[\mathbf{u}]_\beta$*,* $[\mathbf{v}]_\beta$*,* $[\mathbf{w}]_\beta$*; (e)* $[\mathbf{u}]_\gamma$*,* $[\mathbf{v}]_\gamma$*,* $[\mathbf{w}]_\gamma$*.*

Solução: *(a) Seja* $G = \langle\gamma\rangle$*. Se* $\mathbf{z} \in W$*, então* $\mathbf{z} = a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x$*. Logo* $\mathbf{z} = a\operatorname{sen}^2 x + b(1 - \operatorname{sen}^2 x) = b1 + (a-b)\operatorname{sen}^2 x \in G$*. Agora se* $\mathbf{k} \in G$*, então* $\mathbf{k} = a1 + b\operatorname{sen}^2 x = a(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + b\operatorname{sen}^2 x = (a+b)\operatorname{sen}^2 x + a\cos^2 x \in W$*. Logo* $G = W$*.*

(b) Vamos provar que β *é LI. Suponha que* $a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x = 0$*. Queremos provar que* $a = b = 0$*. Como a identidade é para todo* $x \in \mathbb{R}$*, tomando* $x = 0$ *concluímos que* $a0 + b1 = 0$*,*

ou seja, $b = 0$. Tomando $x = \pi/2$, $a1 + b0 = 0$, logo $a = 0$. Convidamos o leitor a provar que γ é LI. Uma técnica mais geral é o ***Wronskiano*** *apresentada na Definição 6.24 da p.193.*

(c) $\mathbf{u} = \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \in W$, $\mathbf{v} = \cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) \in W$,

(d) Pelo item anterior e identidades trigonométricas (verifique!) $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ■

O próximo lema garante que todo espaço vetorial de dimensão finita n é essencialmente igual ao $\mathbb{R}^n$ (em linguagem matemática, dizemos isomorfo pois existe bijeção linear).

Lema 4.48 (função vetor → coordenadas é bijeção linear) *Considere V espaço vetorial de dimensão finita n com base β. A função* $\begin{array}{rccc} [\,\cdot\,]_\beta : & V & \to & \mathcal{M}_{n\times 1} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & [\mathbf{v}]_\beta \end{array}$ *é:*

(a) linear, isto é, preserva combinações lineares,

$$[\alpha\mathbf{u} + \gamma\mathbf{v}]_\beta = \alpha[\mathbf{u}]_\beta + \gamma[\mathbf{v}]_\beta \quad \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;$$

(b) injetivo, isto é, se $[\mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{w}]_\beta$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(c) sobrejetivo, isto é, dada matriz coluna $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $[\mathbf{v}]_\beta = A$.
Além disso existe uma bijeção linear $L : V \to \mathbb{R}^n$.

Prova: (a) Escrevemos $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$ e $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i$. Assum $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \gamma_i)\mathbf{v}_i$. É imediato que $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{w}]_\beta$. Analogamente, $[\xi\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_n \end{bmatrix} = \xi[\mathbf{u}]_\beta$.

(b) Segue da unicidade da representação de um vetor como CL de vetores de uma base.

(c) Dado $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ defina $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$.

Seja ε a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $[\,\cdot\,]_\varepsilon^{-1} : \mathcal{M}_{n\times 1} \to \mathbb{R}^n$ a função inverso. Defina $L = [[\,\cdot\,]_\beta]_\varepsilon^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$, a composição de $[\,\cdot\,]_\varepsilon^{-1}$ com $[\,\cdot\,]_\beta$. ■

Embora coordenadas sem indicação da base não determinem um vetor, existe uma convenção (dizemos que é um abuso de notação, isto é, um uso da notação diferente do convencionado) que é assumir que a base é canônica. Temos três formas equivalentes de determinar o mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (veja p.31):

- considere o vetor $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (uso correto);

- considere o vetor $[\mathbf{v}]_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ (uso correto);
- considere o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ (abuso de notação).

O último uso é tão comum que muitos livros usam como definição de vetor do $\mathbb{R}^n$: um vetor é uma matriz com uma coluna e n linhas. Um vetor poderia ser uma matriz linha, mas a convenção utilizada em **todos** os livros é como uma matriz coluna.

4.8 ⋆Matriz Representando TL: Mudança de Base[1]

Antes de estudar esta seção estude a definição de coordenadas de um vetor numa base (Definição 4.47 da p.118).

O Lema 4.5 da p.94 mostra que existe uma bijeção entre matrizes ($\mathcal{M}_{m\times n}$) e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ (TLs do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$). Vamos associar matrizes a TLs entre dois espaços vetoriais quaisquer de dimensão finita.

Definição 4.49 (matriz associada à TL) *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$ e bases $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de U e γ de V. Dada $T \in \mathcal{L}(U;V)$, denotamos por $[T]_{\gamma\leftarrow\beta} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ a matriz de que representa T. Ela é definida por*

$$[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [T(\mathbf{u}_1)]_\gamma & \cdots & [T(\mathbf{u}_n)]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Desta forma, cada coluna da matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ é formada pelas coordenadas do vetor $T(\mathbf{u}_i)$ na base γ.

Em que sentido a matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ representa T?

A resposta está no próximo teorema, cujo resultado apresentamos no diagrama da Figura 4.18. O significado do diagrama (e do teorema) é que ele comuta: tanto faz, partindo de $\mathbf{u} \in U$, aplicar diretamente T e calcular suas coordenadas na base γ, ou calcular suas coordenadas na base β e aplicar a matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$.

Teorema 4.50 (relação entre matriz e TL) *Seja $T \in \mathcal{L}(U;V)$ e bases β de U e γ de V. Então, para todo $\mathbf{u} \in U$,*

$$[T(\mathbf{u})]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}]_\beta.$$

Prova: Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Então, pela linearidade do produto matriz-vetor (Lema 2.20 da p.54), $[T(\mathbf{u})]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}]_\beta$ para todo $\mathbf{u} \in U$ se, e somente se, $[T(\mathbf{u}_j)]_\gamma = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta$ para $j = 1, \dots, n$.

Como $[\mathbf{u}_j]_\beta = \mathbf{e}_j$, $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta = [T]_{\gamma\leftarrow\beta}\mathbf{e}_j$, que é igual à j-ésima coluna de $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$, que por definição é $[T(\mathbf{u}_j)]_\gamma$. Portanto, $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}_j]_\beta = [T(\mathbf{u}_j)]_\gamma$. ∎

[1] A leitura desta seção é opcional.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{T} & V \\ [\,\cdot\,]_\beta \Big\downarrow & & \Big\downarrow [\,\cdot\,]_\gamma \\ \mathcal{M}_{n\times 1} & \xrightarrow[{[T]_{\gamma\leftarrow\beta}}]{} & \mathcal{M}_{m\times 1} \end{array}$$

Figura 4.18: Matriz $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$ que representa uma transformação linear T.

Exemplo 4.44 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $T(1,0) = (1,2,3)$ e $T(2,1) = (0,0,2)$. Considere as bases $\beta = \{(1,0),\ (2,1)\}$, $\gamma = \{(1,2,3),\ (0,0,2),\ (0,1,0)\}$, $\varepsilon_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$ e $\varepsilon_3 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$. Determine:*

(a) $[T]_{\gamma\leftarrow\beta}$; $[T]_{\varepsilon_3\leftarrow\varepsilon_2}$.

Solução: *Como $\beta = \{(1,0),\ (2,1)\}$, precisamos calcular $[T(1,0)]_\gamma = [(1,2,3)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[T(2,1)]_\gamma = [(0,0,2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, $[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0)]_\gamma & [T(2,1)]_\gamma \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Como $\varepsilon_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$, precisamos calcular $[T(1,0)]_{\varepsilon_3}$ e $[T(0,1)]_{\varepsilon_3}$. Embora não tenha sido fornecido $T(0,1)$ diretamente, $(0,1) = (2,1) - 2(1,0)$. logo, $T(0,1) = T(2,1) - 2T(1,0) = (0,0,2) - 2(1,2,3) = (-2,-4,-4)$. Portanto, $[T(1,0)]_{\varepsilon_3} = [(1,2,3)]_{\varepsilon_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $[T(0,1)]_{\varepsilon_3} = [(-2,-4,-4)]_{\varepsilon_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$. Logo, $[T]_{\varepsilon_3\leftarrow\varepsilon_2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0)]_{\varepsilon_3} & [T(0,1)]_{\varepsilon_3} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 4.45 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, ε base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ com $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1$. Determine:*

(a) $[T]_{\varepsilon\leftarrow\varepsilon}$; (b) $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$.

Solução: *(a) Como $[T\mathbf{e}_1]_\varepsilon = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[T\mathbf{e}_2]_\varepsilon = [2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[T]_{\varepsilon\leftarrow\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.*

(b) Precisamos calcular $[T(\mathbf{v}_1)]_\beta$ e $[T(\mathbf{v}_2)]_\beta$.

Vemos que $[T(\mathbf{v}_1)]_\beta = [T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)]_\beta = [(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)]_\beta = [3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [3\mathbf{v}_1]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, $[T(\mathbf{v}_2)]_\beta = [T(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1)]_\beta = [T(\mathbf{e}_2) - 2T(\mathbf{e}_1)]_\beta = [(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)]_\beta = [\mathbf{0}]_\beta = [0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Logo, $[T]_{\beta\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Notação 4.51 *Quando uma TL vai de um EV nele mesmo,* $T : U \to U$*, podemos escolher a mesma base* β *para o domínio e o contra-domínio. Denotamos* $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$ *por* $[T]_\beta$*.*

Exemplo 4.46 *Seja* $\gamma = \{1, x, x^2\}$*, e* $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *definido por* $D(f) = f'$ *(derivada). Determine* $[D]_\gamma$*.*

Solução: $D(1) = 0$ e $[0]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $D(x) = 1$ e $[1]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $D(x^2) = 2x$ e $[2x]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Logo* $[D]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 4.47 *Seja* $\beta = \{\operatorname{sen} x, e^{2x}, \cos x\}$*,* $V = \langle\beta\rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *e* $D : V \to V$ *definido por* $D(f) = f'$ *(derivada). Determine* $[D]_\beta$*.*

Solução: $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ e $[\cos x]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ e $[-\operatorname{sen} x]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $D(e^{2x}) = 2e^{2x}$ e $[2e^{2x}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Logo* $[D]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Definição 4.52 (matriz de mudança de base) *Considere bases* β *e* γ *do espaço de dimensão finita* U *e a TL identidade* I *em* U*. Como*

$$[I]_{\gamma\leftarrow\beta}[\mathbf{u}]_\beta = [I(\mathbf{u})]\gamma = [\mathbf{u}]\gamma,$$

a matriz $[I]_{\gamma\leftarrow\beta}$ *transforma as coordenadas de* $\mathbf{u}$ *na base* β *em coordenadas de* $\mathbf{u}$ *na base* γ*. Pela definição, se* $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$*,*

$$[I]_{\gamma\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [I(\mathbf{u}_1)]_\gamma & \cdots & [I(\mathbf{u}_n)]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ [\mathbf{u}_1]_\gamma & \cdots & [\mathbf{u}_n]_\gamma \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.48 *Dada as bases canônica* ε *e* $\beta = \{(1, 2), (3, 4)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*, determine* $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}$*.*

Solução: *É imediato que* $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [(1,2)]_\varepsilon & [(3,4)]_\varepsilon \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. *Se quisermos* $[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$*, pelo Corolário 4.54 mais adiante, basta inverter a matriz acima.* ■

Observação 4.21 *Do exemplo anterior observamos que cálculo da matriz mudança de base de uma base* β *qualquer para canônica* ε *é fácil. A matriz de mudança inversa pode ser obtida invertendo esta matriz. Esta é uma importante consequência do próximo lema.*

Lema 4.53 (relaçao entre produto de matrizes e composição de TLs) *Dados* $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V; W)$*, e bases* β, γ, δ *dos espaços vetoriais de dimensão finita* U, V, W*, conforme indicado no diagrama da Figura 4.19,* $[S]_{\delta\leftarrow\gamma}[T]_{\gamma\leftarrow\beta} = [S \circ T]_{\delta\leftarrow\beta}$*.*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\beta}"] \arrow[rr, bend left, "S \circ T"] & V \arrow[r, "S"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\gamma}"] & W \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_\delta}"] \\
\mathcal{M}_{n\times 1} \arrow[r, "{[T]_{\gamma\leftarrow\beta}}"'] \arrow[rr, bend right, "{[S\circ T]_{\delta\leftarrow\beta}}"'] & \mathcal{M}_{m\times 1} \arrow[r, "{[S]_{\delta\leftarrow\gamma}}"'] & \mathcal{M}_{p\times 1}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.19: Composição de TLs

Prova: Aplicação direta das definições. ■

Corolário 4.54 (inversa da mudança de base) *Considere bases β e γ de U e a TL identidade I em U. Então a matriz mudança de base $[I]_{\gamma\leftarrow\beta}$ é igual a $[I]^{-1}_{\beta\leftarrow\gamma}$ (inversa).*

Qual a relação entre matrizes que representam a mesma TL? Vamos simplificar e considerar o caso em que $T \in \mathcal{L}(U;U)$ (mesmo espaço). Considere bases β e γ de U. Qual a relação entre as matrizes $[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}$ e $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$?

Definição 4.55 (matrizes semelhantes) *Dizemos que duas matrizes A e B são semelhantes quando existe uma matriz invertível (quadrada) P tal que $PAP^{-1} = B$.*

Lema 4.56 (matrizes da mesma TL) *Considere $T \in \mathcal{L}(U;U)$ e bases β e γ de U. Então $[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}$ e $[T]_{\beta\leftarrow\beta}$ são semelhantes com $P = [I]_{\beta\leftarrow\gamma}$ (matriz de mudança de base).*

Prova: Como $ITI = T$, aplicando o Lema 4.53 duas vezes, $[I]_{\beta\leftarrow\gamma}[T]_{\gamma\leftarrow\gamma}[I]_{\gamma\leftarrow\beta} = [T]_{\beta\leftarrow\beta}$. Tomando $P = [I]_{\beta\leftarrow\gamma}$ e aplicando o Corolário 4.54, $P^{-1} = [I]_{\gamma\leftarrow\beta}$. ■

Fazendo uma escolha adequada da base, a matriz que representa a TL pode ser muito mais simples, como por exemplo diagonal. Como descobrir qual base fará isso? Este é o assunto do Capítulo 7 da p.195.

Para resumir: as coordenadas de um vetor $\mathbf{v}$ estão para $\mathbf{v}$ assim como a matriz que representa uma transformação linear T está para T:

$$\frac{\text{coordenadas de } \mathbf{v}}{\mathbf{v}} \quad \text{assim como} \quad \frac{\text{matriz que representa } T}{T}.$$

4.9 Exercícios de Transformações Lineares

4.9.1 Exercícios de Fixação

Fix 4.1: Determine se são transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

(a) $T(x, y) = (x + 2y,\ xy)$; (b) $T(x, y) = (x + 2y,\ 0)$; (c) $T(x, y) = (x^2 + 2y,\ y)$;

Fix 4.2: Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existe uma matriz A que a representa e vice-versa (veja Definição 4.3 da p.93).

(a) se $T(x, y) = (3x + 7y,\ 5x - 4y)$, então $A = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$;

(b) se $T(x, y) = (y,\ -x,\ 2x + y)$, então $A = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$;

(c) se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, então $T(x, y) = (\_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_)$;

(d) se $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \end{bmatrix}$, então $T(x, y) = (\_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_)$.

Fix 4.3: Determine T que projeta (ortogonalmente) vetores do:

(a) $\mathbb{R}^2$ no eixo y; (b) $\mathbb{R}^3$ no eixo y; (c) no plano $x = 0$.

Fix 4.4: Qual das alternativas apresenta a matriz que roda os vetores do $\mathbb{R}^2$ por um ângulo θ (no sentido trigonométrico, isto é, anti-horário):

(A) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

Fix 4.5: Seja A uma matriz.

(a) O posto de A é igual a: _______($\mathit{Nuc}\,A, \mathit{Im}\,A, \dim \mathit{Nuc}\,A, \dim \mathit{Im}\,A$).

(b) O espaço-coluna de A é igual a: _______($\mathit{Nuc}\,A, \mathit{Im}\,A, \mathit{Nuc}\,A^T, \mathit{Im}\,A^T$);

(c) O espaço-linha de A é igual a: _______($\mathit{Nuc}\,A, \mathit{Im}\,A, \mathit{Nuc}\,A^T, \mathit{Im}\,A^T$).

Fix 4.6: Considere $I : V \to V$ e $T : V \to W$ definidas por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

(a) $\mathrm{Nuc}(I) =$ ___($V, W, \mathbf{0}$); (b) $\mathrm{Im}(I) =$ ___($V, W, \mathbf{0}$);

(c) $\mathrm{Nuc}(T) =$ ___($V, W, \mathbf{0}$); (d) $\mathrm{Im}(T) =$ ___($V, W, \mathbf{0}$);

Fix 4.7: Seja $T : V \to W$ uma TL. Para cada pergunta, escolha uma das opções.

(i) a definição de $\mathrm{Nuc}(T)$ é:

(A) $\{\mathbf{w} \in W \mid T(\mathbf{0}) = \mathbf{w}\}$; (B) $\{\mathbf{w} \in W \mid T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$;

(C) $\{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$; (D) $\{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{0}) = \mathbf{v}\}$.

(ii) a definição de $\mathrm{Im}(T)$ é:

(A) $\{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$;

(B) $\{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{v} = T(\mathbf{w}) \text{ para algum } \mathbf{w} \in W\}$;

(C) $\{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$;

(D) $\{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = T(\mathbf{w}) \text{ para algum } \mathbf{w} \in W\}$;

(iii) T é sobrejetiva se, e somente se:

(A) $\dim(V) = \dim(W)$; (B) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$; (C) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$;

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$; (E) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$.

(iv) T é injetiva se, e somente se:

(A) $\dim(V) = \dim(W)$; (B) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$; (C) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$;

(D) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$; (E) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0$.

[1]07.out.2012 15h

Fix 4.8: Determine (geometricamente, não faça contas) o núcleo e a imagem de cada uma das TLs abaixo de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:
(a) projeção ortogonal na reta gerada pelo vetor $(2,1,1)$;
(b) rotação de 11 graus em torno do eixo $(-2,1,2)$;
(c) reflexão em torno do plano $x=0$;
(d) projeção ortogonal no plano $x=0$.

Fix 4.9: Este exercício é para ser feito com **argumentos geométricos**. Todas as transformações estão definidas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Seja P uma projeção ortogonal na reta r e R uma reflexão em torno da mesma reta r. Determine:
(a) $\mathrm{Im}(P) =$__$(\mathbf{0}, r, \mathbb{R}^2)$; (b) $\mathrm{Nuc}(R) =$__$(\mathbf{0}, r, \mathbb{R}^2)$; (c) $PP =$__$(P, R, I, 0)$;
(d) $RR =$__$(P, R, I, 0)$; (e) $RP =$__$(P, R, I, 0)$; (f) $PR =$__$(P, R, I, 0)$;
(g) de forma geral P^n e R^n com $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Fix 4.10: Seja $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{10}$ linear. Se $\dim(\mathrm{Nuc}(T))$ for igual a:
(a) 0, $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$__; (b) 3, $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$__; (c) 5, $\dim(\mathrm{Im}(T)) =$__.

Fix 4.11: Determine $\dim(\mathrm{Im}(T))$ sabendo que:
(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ com $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 3$; (b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ com T injetiva.

Fix 4.12: Determine $\dim(\mathrm{Nuc}(T))$ sabendo que:
(a) $T : V \to W$ com T sobrejetiva, $\dim(V) = 5, \dim(W) = 3$;
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabendo que existe a inversa de T.

Fix 4.13: Determine se é verdadeiro ou falso cada um das seguintes afirmativas sobre TLs:
(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ pode ser injetiva;
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ com $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ é injetiva.
(c) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é linear.
(d) Se T é injetiva, então não existe $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tal que $T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$.
(e) se $T : V \to V$ possui inversa, então $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = \dim(V)$.

Fix 4.14: Considere $D^2 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $D^2(f) = f''$ (duas derivadas). Determine se fazem parte do $\mathrm{Nuc}(D^2)$: (a) $3x^3 + x^2$; (b) $3x - 4$; (c) x^2; (d) 5.

Fix 4.15: Seja A uma matriz com m linhas e n colunas. Determine se é verdadeiro ou falso:
(a) se $m > n$, então as colunas são LIs;
(b) se $m < n$, então o núcleo de A contém uma reta;

Fix 4.16: Qual(is) das seguintes propriedades do produto de matrizes são válidas:
(a) associatividade? (b) comutatividade? (c) distributividade?

Fix 4.17: Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, então $(A+B)(A+B) =$ ___$(A^2+2AB+B^2,\ A^2+AB+BA+B^2)$.

Fix 4.18: Sejam A e B matrizes (dimensões apropriadas para estar definido AB). Então:
(a) colunas de AB são combinações lineares das _________(*linhas, colunas*) de __$(A,\ B)$.
(b) linhas de AB são combinações lineares _________(*linhas, colunas*) de __$(A,\ B)$.
(c) entradas de AB são produto escalar de ________ (*linhas, colunas*) de A por ________ (*linhas, colunas*) B.

Fix 4.19: Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível, então
(a) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) =$ __; (b) $\dim(\mathrm{Im}(A)) =$ __; (c) posto de $A =$ __.

Fix 4.20: A matriz M possui inversa e $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Determine $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tais que: (a) $M\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$; (b) $M\mathbf{v} = \mathbf{e}_3$; (c) $M\mathbf{w} = \mathbf{e}_4$.

Fix 4.21: Se A, B, C são invertíveis e $AB = C$, então $A =$ __ $(BC, CB, B^{-1}C, CB^{-1})$.

Fix 4.22: Note que $y = 1$ e $x = -2$ é solução do sistema $\left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y = -8 \\ x + 4y = 2 \end{array} \right.$.

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então $A^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix}$.

Fix 4.23: Se $M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $M \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, então M é (escolha uma opção):

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$; (B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

Fix 4.24: Porque o produto entre duas matrizes não é definido como a produto entre cada entrada correspondente? Por exemplo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA & bB \\ cC & dD \end{bmatrix}$.

4.9.2 Problemas

Prob 4.1: Determine a TL que representa uma:

(a) reflexão em $\mathbb{R}^2$ em torno da reta $x + y = 0$.
(b) projeção ortogonal em $\mathbb{R}^3$ sobre o plano $y = z$;
(c) rotação em $\mathbb{R}^3$ de 45^0 em torno do eixo z.

Prob 4.2: Este exercício é para ser feito com **argumentos geométricos**. Todas as transformações estão definidas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Sejam: — R uma reflexão em torno da reta r, — P uma projeção ortogonal na mesma reta r, e — Q uma projeção ortogonal na reta s perpendicular a reta r. Determine $(\pm P, \pm Q, \pm R, \pm I, 0)$:

(a) $PQ =$__; (b) $QP =$__; (c) $QR =$__; (d) $RQ =$__.

Prob 4.3: Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (4x - y + 2z,\ -2x + y/2 - z)$. Determine se:

(a) $(1, 2) \in \mathrm{Im}(T)$; (b) $(1, 4, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$; (c) $(0, 2, 2) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

Prob 4.4: Determine o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões de:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z) = (x - y,\ -y - z\ , y - x,\ y + z)$;
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y,\ z + 2x,\ 2y + z)$;
(c) $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $L(a, b, c, d, e) = (a + 3c - e,\ c - d + e,\ a + 4c - d)$.

Prob 4.5: Considere $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T_1(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x - y)$ e $T_2(x, y, z) = (3x - 2y + z,\ x - z)$. Determine uma base para $\mathrm{Nuc}(T_1) \cap \mathrm{Nuc}(T_2)$.

Prob 4.6: Determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem para cada matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Prob 4.7: Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau $\leq n$. Determine se é linear:

(a) $L : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ definida por $L(p)(x) = p(x + 1) - 3p(2)$;
(b) $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $L(p)(x) = p'(x) + 1$;
(c) $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $L(p)(x) = cx^2 + ax + b$ se $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Prob 4.8: Calcule a imagem e o núcleo de cada uma das TLs abaixo:

(a) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, definida por $T(p) = p''$ (segunda derivada).

(b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(3)$.

(c) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ definida por $T(p)(x) = xp(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$.

Prob 4.9: Explique em cada caso porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva;

(c) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ com $\dim \mathrm{Nuc}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$;

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{Nuc}(T) = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$ e $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,1,2),(2,2,4)\rangle$.

Prob 4.10: Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva $(-1,2)$ em $(1,0)$ e $(1,-1)$ em $(-1,-1)$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que o núcleo é plano $\left\{ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ z-w=0 \end{array} \right.$ e a imagem $\langle (1,-1,1),(1,2,3)\rangle$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja dado pela parametrização $\left\{ \begin{array}{l} x=s \\ y=t \\ z=t+s \end{array} \right.$ e a imagem seja solução do sistema $\left\{ \begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z-w=0 \end{array} \right.$.

Prob 4.11: Seja $W = \{p \in \mathcal{P}_3 |\ p(0) = 0\}$ e $D : W \to \mathcal{P}_3$ definida por $Dp = p'$. Mostre que D é injetiva.

Prob 4.12: Resolva o sistemas $\left\{ \begin{array}{rcr} 6x+3y & = & 9 \\ 4x+3y & = & 5 \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{rcr} 6x+3y & = & -3 \\ 4x+3y & = & 1 \end{array} \right.$ simultaneamente colocando em forma totalmente escalonada a matriz $\left[\begin{array}{cc|cr} 6 & 3 & 9 & -3 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right]$.

Prob 4.13: Inverta: (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Prob 4.14: Determine a representação matricial e inverta (se for possível) a TL: $T(x,y,z) = (x+z,\ x-z,\ y)$;

Prob 4.15: Determine a matriz inversa das matrizes formada por: blocos de zeros, matriz identidade e A (que não precisa ser invertível).

(a) $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$;

Prob 4.16: Seja $S = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}$ uma matriz de blocos. Calcule S^2.

Prob 4.17: Para números reais vale a chamada lei do corte: se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. Para matrizes isto não é válido.

(a) tome $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e determine $B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $AB = AC$ e $B \neq C$;

(b) supondo que A é invertível, mostre que $AB = AC$ implica $B = C$.

4.9.3 Extras

TL e Matriz, TL Geométrica

Ext 4.1: [2] Determine se são lineares as operações no espaço $\mathcal{P}$ de todos os polinômios em x:
(a) multiplicação por x; (b) multiplicação por x^2; (c) derivada em relação a x.

Ext 4.2: Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem com ângulo θ satisfazendo $0 \leq \theta < 2\pi$.
(a) se $\theta \neq 0$ existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \neq 0$ tal que $R_\theta \mathbf{v} = \mathbf{v}$?
(b) se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \neq 0$, determine condições em θ para que $\mathbf{v}$ e $R_\theta \mathbf{v}$ sejam linearmente independentes.

Ext 4.3: [3] Em $\mathbb{R}^3$ considere A uma rotação de 90^{o} em torno do eixo x e B uma rotação de 90^{o} em torno do eixo y e C uma rotação de 90^{o} em torno do eixo z. Mostre que:
(a) $A^4 = B^4 = C^4 = I$; (b) $AB \neq BA$; (c) $A^2B^2 = B^2A^2$.

Núcleo, Imagem, Teorema do Núcleo Imagem

Ext 4.4: Seja $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{10}$ linear. O maior valor possível para:
(a) $\dim(\text{Nuc}(T))$ é ___; (b) $\dim(\text{Im}(T))$ é ___.

Ext 4.5: Determine $\dim(\text{Im}(T))$ e $\dim(\text{Nuc}(T))$ sabendo que:
(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ e que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$ possui solução única para um determinado $\mathbf{w}$;
(b) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ com T sobrejetiva.

Ext 4.6: Determine $\dim(\text{Nuc}(T))$ sabendo que:
(a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$ com $\dim(\text{Im}(T)) = 3$; (b) $T : V \to W$ com T injetiva;

Ext 4.7: Determine uma base e dimensão do núcleo e da imagem de:
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ext 4.8: Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & h & 7 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Determine TODOS os valores de $h \in \mathbb{R}$ tais que o posto de A: (a) seja 1; (b) seja 2.

Ext 4.9: Seja $T : V \to W$ linear. Prove que:
(a) $T(0) = 0$; (b) $\text{Nuc}(T)$ é subespaço vetorial; (c) $\text{Im}(T)$ é subespaço vetorial.
(d) se T é injetiva, T leva conjunto LI em conjunto LI.
(e) se T possui inversa, T leva base em base.

Composição de TLs e Produto de Matrizes

Ext 4.10: Sejam S e T TLs tais que faça sentido a composição ST. Mostre que:
(a) se S e T são injetivas, então ST é injetiva;
(b) se S e T são sobrejetivas, então ST é sobrejetiva;
(c) se ST é sobrejetiva, então S é sobrejetiva;
(d) se ST é injetiva, então T é injetiva;

[2] Veja [12] p.113 #3.
[3] Veja [12] p.114 #5.

Função e Matriz Inversa

Ext 4.11: Sejam $T, S : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ definidas por $T(f)(x) = f(2x+2)$ e $S(f)(x) = f(x/2-1)$.

(a) Determine núcleo e imagem de T; (b) Verifique que $T^{-1} = S$.

Ext 4.12: Inverta: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ext 4.13: Determine a representação matricial e inverta (se for possível): $T(x,y,x) = (z,\ y+z,\ x+y+z)$.

Álgebra de Matrizes e TLs

Ext 4.14: Dê exemplos de matrizes em $\mathcal{M}_{2\times 2}$ tais que:

(a) $A^2 = -I$; (b) $B^2 = 0$, $B \neq 0$; (c) $C^2 = C$, $C \neq I$; (d) $C^2 = I$, $C \neq I$;

Ext 4.15: Sabemos que se $a, b \in \mathbb{R}$, então $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$. Vamos ver que para TLs isto não é verdade.

(a) Considere projeções (ortogonais) P_x no eixo x e P_y no eixo y em $\mathbb{R}^2$. Prove que embora nenhuma delas seja nula, $P_xP_y = P_yP_x = \mathbf{0}$;

(b) Considere D_{xx} o operador segunda derivada e D_{xxx} o operador terceira derivada. Prove que em $\mathcal{P}_4$ (polinômios de grau máximo igual a 4) $D_{xx}D_{xxx} = \mathbf{0}$ embora nem D_{xx} nem D_{xxx} sejam nulos.

Obs: em álgebra quando acontece de $ST = 0$ com S e T não-nulos dizemos que existe um divisor de 0.

Ext 4.16: Verifique se é subespaço vetorial o subconjunto das matrizes quadradas:

(a) triangulares superiores; (b) diagonais; (c) simétricas;

(d) Determine bases para os subespaços acima quando a matriz é 2×2 e 3×3.

(e) Seja W_1 o subespaço das matrizes triangulares superiores e W_2 as matrizes triangulares inferiores. Determine $W_1 \cap W_2$.

Ext 4.17:

(a) Determine uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}$. Qual a dimensão deste espaço?

(b) De forma geral, determine base e dimensão de $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Ext 4.18: Considere $T : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{n\times m}$ definida por $T(A) = A^T$. Determine:

(a) $\mathrm{Nuc}(T)$; (b) $\mathrm{Im}(T)$. (c) se T é injetiva; (d) se T é sobrejetiva.

Ext 4.19: Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial (i.e. determine a matriz X) $AX + 2I = B$.

Ext 4.20:

Definição 4.57 (matriz nilpotente) *Dizemos que uma matriz quadrada N é* ***nilpotente*** *de ordem k se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$ e $N^{k-1} \neq 0$.*

Mostre que:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente. Qual valor de k?

(c) D é nilpotente, onde D é o operador de derivação em $\mathcal{P}_n$ (polinômios de grau menor ou igual n). Qual o valor de k?

(d) Se N é nilpotente de ordem k, então $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \cdots + N^{k-1}$.

(e) Se M e N são nilpotentes e $MN = NM$, então $M + N$ é nilpotente.

(f) Existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $N\mathbf{v} = 0$.

Matriz em Blocos

Ext 4.21: Suponha que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ satisfaz $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ com $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, n$. Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ e Σ uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Mostre que $AP = P\Sigma$.

Coordenadas

Ext 4.22: Considere $\mathbf{v} = (4, -1, -1)$ e $\beta = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$;

(a) escreva $\mathbf{v}$ como combinação linear dos vetores de β;

(b) determine $[\mathbf{v}]_\varepsilon$ (base canônica);

(c) determine $[\mathbf{v}]_\beta$;

(d) sabendo que $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$; determine $[\mathbf{w}]_\varepsilon$.

Ext 4.23: Considere as bases do $\mathbb{R}^2$: $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $\beta_2 = \{(0, 2), (1, 0)\}$. Se $[v]_{\beta_1} = (2, 3)$ determine $[v]_{\beta_2}$.

Ext 4.24: Se $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ é base do $\mathbb{R}^4$ e $\mathbf{u} = \mathbf{w}_4 + 2\mathbf{w}_3 + 3\mathbf{w}_2 + 4\mathbf{w}_1$,

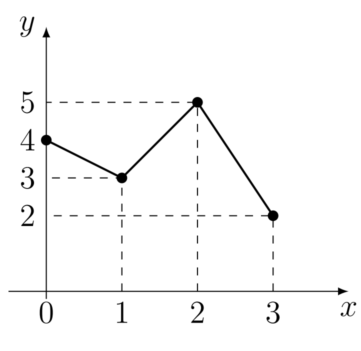
$[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}$.

Ext 4.25: Considere $\mathbf{v} = (0, 5, 1)$. Determine $[v]_\beta$ (coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação à base β), onde $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

Ext 4.26: Considere $\beta_2 = \{1, 1 - x, x^2 - 1\}$. Determine:

(a) $[q]_{\beta_2}$ onde $q(x) = x^2 - x$; (b) $[p]_{\beta_2}$ onde $p(x) = x^2 + x + 1$.

Ext 4.27: Considere as funções $\phi_0, \ldots, \phi_3$ mostradas na Figura 3.1 da p.79. Defina $\beta = \{\phi_0, \ldots, \phi_3\}$ (é base). Seja $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ a função representada no gráfico abaixo. Determine $[f]_\beta$.



Mudança de Base

Ext 4.28: Considere três bases distintas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de um espaço vetorial de dimensão finita.
(a) determine $[I]_{\beta_1 \leftarrow \beta_1}$;
(b) defina $A = [I]_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$, $B = [I]_{\beta_2 \leftarrow \beta_3}$, $C = [I]_{\beta_3 \leftarrow \beta_1}$. Determine ABC.

Ext 4.29: Considere as bases de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ com $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$. Determine a matriz mudança de base $[I]_{\alpha \leftarrow \beta}$.

Ext 4.30: Considere as bases de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = \{(1,0,-1),\ (1,2,3),\ (1,1,1)\}$, $\beta = \{(3,2,1),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$ $\varepsilon = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ (base canônica).
(a) determine as matrizes mudança de base $A = [I]_{\varepsilon \leftarrow \alpha}$ e $B = [I]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$;
(b) escreva equações matriciais que determinem, como função de A, B, A^{-1}, B^{-1} (não calcule A^{-1}, B^{-1}) as matrizes mudança de base $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon}$, $[I]_{\beta \leftarrow \varepsilon}$, $[I]_{\alpha \leftarrow \beta}$, $[I]_{\beta \leftarrow \alpha}$.

Ext 4.31: Considere a base $\alpha = \{(1,1,1), (-1,1,1), (0,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine uma base β tal que $[I]_{\alpha \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.32: Considere as bases de $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(1,0), (0,2)\}$ e $\beta = \{(1,1), (2,1)\}$. Calcule a matriz mudança de base $[I]_{\beta \leftarrow \alpha}$.

Ext 4.33: Considere as bases de $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(6,11), (2,4)\}$ $\varepsilon = \{(1,0), (0,1)\}$.
(a) Calcule a matriz mudança de base $[I]_{\varepsilon \leftarrow \alpha}$.
(b) Explique como determinar $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon}$ usando (a). (Não faça as contas.)
(c) Verifique que $[I]_{\alpha \leftarrow \varepsilon} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}$

Ext 4.34: Seja $\beta = \{(1,0,0), (0,1,-1), (1,-1,0)\}$.
(a) Calcule $[I]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$ e $[I]_{\beta \leftarrow \varepsilon}$; (b) $\mathbf{v} = (0,1,0)$, calcule $[\mathbf{v}]_\beta$;
(c) $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ determine $[\mathbf{w}]_\varepsilon$; (d) $T(x,y,z) = (x-z, -z, y+2z)$, determine $[T]_\beta$.
Dica: $[T]_\beta = [I]_{\beta \leftarrow \varepsilon} [T]_\varepsilon [I]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$

Ext 4.35: Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada na base canônica por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
(a) Ache $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-nulos tais que $T\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$ e $T\mathbf{v} = -\mathbf{v}$;
(b) prove que $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$;
(c) determine $[T]_{\beta \leftarrow \beta}$. Note que nesta base a matriz que representa é mais simples (diagonal).

Ext 4.36: Considere as bases do $\mathcal{P}_1$: $\alpha = \{1-x, 2x\}$ $\beta = \{1+x, x\}$, e do $\mathcal{P}_2$: $\gamma = \{1, x, x^2\}$ e $\delta = \{1+x, 1-x, x^2+1\}$. Determine $[I]_{\alpha \leftarrow \beta}$ e $[I]_{\gamma \leftarrow \delta}$.

Ext 4.37: Considere os conjuntos LIs de funções:
$\beta_1 = \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\}$; $\beta_2 = \{e^x,\ e^{2x}\}$; $\beta_3 = \{1,\ x,\ e^x,\ xe^x\}$;
$\beta_4 = \{1,\ x,\ x^2\}$; $\beta_5 = \{\operatorname{sen}(x),\ \operatorname{sen}(2x),\ \operatorname{sen}(3x)\}$; $\beta_6 = \{e^x,\ xe^x,\ x^2e^x\}$.
Seja $W_i = \langle \beta_i \rangle$ (espaço gerado por cada conjunto de funções). Sejam D o operador derivada $Df = f'$ com $D : W_i \to W_i$ e D^2 o operador derivada segunda $D^2 f = f''$ com $D^2 : W_i \to W_i$. Determine a matriz:
(a) $[D]_{\beta_1}$; (b) $[D]_{\beta_2}$; (c) $[D]_{\beta_3}$; (d) $[D^2]_{\beta_4}$; (e) $[D^2]_{\beta_5}$; (f) $[D^2]_{\beta_6}$.

Ext 4.38: Considere a base $\beta_1 = \{1, x\}$ de $\mathcal{P}_1$ e a base $\beta_2 = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definida por $T(p)(x) = p(x+1)$, e $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, definida por $S(p)(x) = xp(x)$. Determine:

(a) $[S]_{\beta_2 \leftarrow \beta_1}$; (b) $[T]_{\beta_2 \leftarrow \beta_2}$.

Ext 4.39: Considere V o espaço das matrizes diagonais 2×2 e as bases $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Determine $[I]_{\alpha \leftarrow \beta}$.

4.9.4 Desafios

Des 4.1:[4] Seja $T : V \to V$ uma TL com V de dimensão finita. Mostre que:

(a) $\mathrm{Nuc}(T) \supset \mathrm{Im}(T)$ se, e somente se, $T^2 = 0$;

(b) $\mathrm{Nuc}(T) \subset \mathrm{Nuc}(T^2) \subset \mathrm{Nuc}(T^3) \cdots$.

(c) $\mathrm{Im}(T) \supset \mathrm{Im}(T^2) \supset \mathrm{Im}(T^3) \cdots$.

(d) se $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim \mathrm{Im}(T^2)$, então $\mathrm{Nuc}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = \{\mathbf{0}\}$.

Des 4.2: Considere $T : V \to W$ linear, $X \subset V$ e $U \subset W$ subespaços vetoriais.

(a) Defina $T(X) = \{T(\mathbf{v}) \in W |\ \mathbf{v} \in X\}$ (imagem direta de X por T). Mostre que $T(X)$ é um subespaço vetorial de W.

(b) Defina $T^{-1}(U) = \{\mathbf{v} \in V |\ T(\mathbf{v}) \in U\}$ (imagem inversa de U por T). Mostre que $T^{-1}(U)$ é um subespaço vetorial de V.

Des 4.3:[5] No espaço de todos os polinômios em x (que é um espaço de dimensão infinita) considere D o operador derivação com relação a x e S o operador multiplicação por x.

(a) Mostre que $DS - SD = I$;

(b) Utilize propriedades do traço (soma dos elementos da diagonal de uma matriz quadrada) para mostrar que em dimensão finita não existem transformações lineares A, B tais que $AB - BA = I$.

Des 4.4: (desigualdade de Sylvester) Sejam $T, S : V \to V$ com $\dim(V) = n$, $r_T = \dim \mathrm{Im}(T)$, $r_S = \dim \mathrm{Im}(S)$, $r_{ST} = \dim \mathrm{Im}(ST)$. Prove que

$$r_S + r_T - n \leq r_{ST} \leq \min(r_S, r_T).$$

Des 4.5: Suponha que $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ satisfaz $AB = BA$ para toda $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Prove que A é múltiplo da matriz identidade.

Des 4.6: Considere $T : V \to V$ linear e A uma matriz quadrada fixa. Se $[T]_\beta = A$ para qualquer base β de V, então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ (a transformação é um múltiplo da identidade).

Des 4.7: Suponha que B é a inversa de A^2. Mostre que A é invertível e determine A^{-1} em termos de A e B.

Des 4.8:[6] Seja J_n uma matriz quadrada $n \times n$ em que todas as entradas são iguais a 1. Mostre que $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n+1} J_n$.

Des 4.9:[7] Prove que se A é invertível, então $A + B$ é invertível se, e somente se, $I + BA^{-1}$ é invertível.

Des 4.10: Fixe $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e defina $T, S : \mathcal{M}_{n \times n} \to \mathcal{M}_{n \times n}$ por $T(A) = AB - BA$ e $S(A) = BA$ para todo $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Mostre que:

(a) $\mathrm{Nuc}(T)$ é não-trivial. Conclua que T não é invertível;

---

[4] Veja [12] p.117 #36.

[5] Veja [12] p.114 #6, #15.

[6] Veja [1].

[7] Veja [1].

(b) $\mathrm{Nuc}(S) = \{\mathbf{0}\}$ se, e somente se, B possui inversa.

Des 4.11: Determine uma base (e dimensão) de

(a) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$; (b) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

Des 4.12: (a) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Prove que existem $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ que não sejam todos nulos tais que $a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 = 0$.

Dica: $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) = 4$, o conjunto $\{I, T, T^2, T^3, T^4\}$ é LI?.

(b) Considere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Prove que existe um polinômio $p(x)$ não-degenerado de grau n^2 tal que $p(T) = \mathbf{0}$.

Obs: Definimos $p(T)$ da seguinte forma. Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^k$, definimos $p(T)$ como a matriz $a_0 I + a_T + \cdots + a_n T^k$.

Dica: Generalização de (a).

Des 4.13: Dado um espaço vetorial V, denotamos por V^* o conjunto $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ das transformações lineares de V em $\mathbb{R}$. Os elementos de V^* são chamados de **formas lineares** ou **funcionais lineares** em V. Já sabemos que este é um espaço vetorial pois V e $\mathbb{R}$ são espaços vetoriais. Suponha que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ é base de V. Prove que:

(a) $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ definida por $T_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ é base de V^*. O símbolo δ_{ij} é conhecido como delta de Kronecker e vale 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.

(b) $\dim(V) = \dim(V^*)$. Dica: Use (a).

Des 4.14: Determine base e dimensão de $\mathcal{L}(U; V)$ com U e V espaços de dimensão finita.

Des 4.15: Seja A uma matriz 2×2.

(a) Prove que se aplicarmos A no círculo de raio 1 com centro na origem a imagem será uma elipse (pode ser degenerada).

(b) Podemos associar um vetor a cada eixo desta elipse e obter os chamados **valores singulares** da matriz A: σ_1, σ_2 o tamanho de cada semi-eixo. Assim se Σ for a matriz diagonal com estes sigmas, Q uma matriz onde cada coluna é um eixo da elipse, obtemos a chamada **decomposição SVD** da matriz. Prove que toda matriz A pode ser escrita como $A = Q\Sigma P$.

Obs: Isto se generaliza para uma matriz qualquer.

Capítulo 5

Produto Interno

Começamos este capítulo definindo comprimento de vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, obtido pelo Teorema de Pitágoras, e sua relação com o produto escalar (ou interno). Depois generalizamos para o $\mathbb{R}^n$ definindo o produto interno, que permite definir comprimento, distância e ortogonalidade (de forma mais geral ângulo) entre vetores.

Com o conceito de complemento ortogonal, definimos a projeção ortogonal em subespaços vetoriais. Exploramos a relação entre vetor mais próximo de um subespaço vetorial e ortogonalidade, ideia chave deste capítulo.

São aplicações importantes:

- resolver problema de mínimos quadrados, a "melhor" solução aproximada de um sistema linear sem solução;
- determinar projeções e reflexões em torno de retas, planos e, de forma mais geral, em subespaços vetoriais de dimensão qualquer no $\mathbb{R}^n$;
- aproximar funções por polinômios ou outras funções simples.

5.1 Produto Interno em $\mathbb{R}^n$

Em $\mathbb{R}^2$, define-se o comprimento (também chamado de norma) de um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, em $\mathbb{R}^3$, de um $\mathbf{v} = (x, y, z)$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Conforme indicado na Figura 5.1, o comprimento em $\mathbb{R}^2$ decorre de uma aplicação do Teorema de Pitágoras e em $\mathbb{R}^3$ de duas aplicações pois $\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se $\mathbf{w} = (a, b)$, a distância entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é dada (basta aplicar Pitágoras) por $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

Definindo-se o produto interno de $\mathbb{R}^2$ por $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = ax + by$ e em $\mathbb{R}^3$ por $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = ax + by + cz$, temos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle}$ e $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ (confira!). Comprimento (norma), distância e produto interno são generalizados para o $\mathbb{R}^n$ nas definições abaixo.

Definição 5.1 (produto interno no $\mathbb{R}^n$) *Dados* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$*, define-se o* ***produto interno***[2] *ou* ***produto escalar*** *de* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *por* $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$*. Outras notações utilizadas são* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *e* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *para* $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$*.*

[1] Versão 04.out.2012 18h

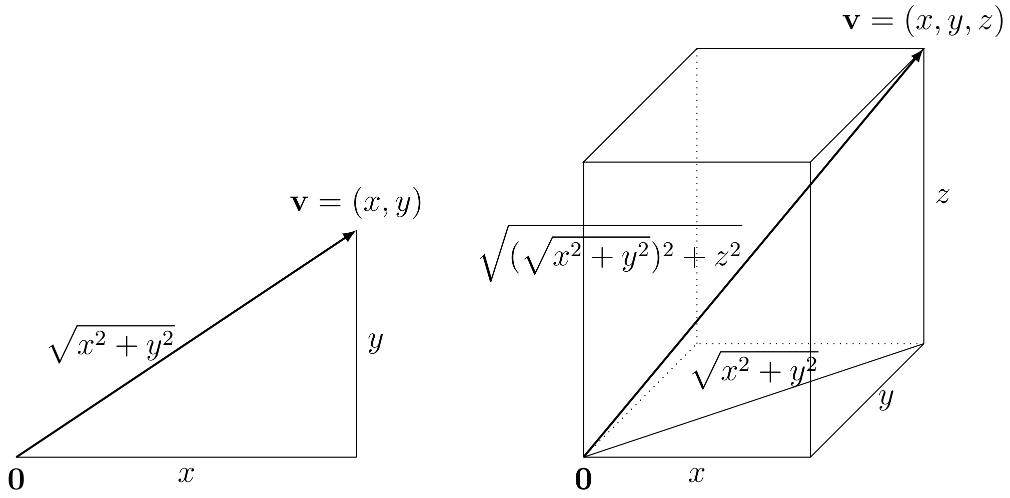


Figura 5.1: Comprimento em $\mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$

Lema 5.2 (propriedades do produto interno) *Considere $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. O **produto interno**[3] satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) simetria: $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} \,|\mathbf{v} \rangle$;

(b) linearidade: $\langle \alpha\mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) positividade: $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Prova: Deixamos para o leitor. ■

Definição 5.3 (norma) *Definimos a **norma**[4] (ou comprimento) de $\mathbf{v}$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle}$.*

Definição 5.4 (distância) *Definimos a **distância**[4] entre dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.*

Observação 5.1 *São propriedades fáceis (verifique!) da norma e da distância:*

- $\|\mathbf{0}\| = 0$ *(vetor nulo tem norma zero),*
- $\|\mathbf{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *(o único vetor com norma zero é o vetor zero),*
- $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(vetor multiplicado por escalar tem norma modificada por módulo do escalar),*
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$,
- $d(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{v}\|$.

[2] Para evitar confusão com produto interno, **neste capítulo** denotamos o espaço gerado por $\operatorname{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

[3] De forma geral, dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, uma função que associa a cada par de vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ um número real $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$ satisfazendo estas propriedades é chamada de **produto interno** em V. Veja: Exemplo 5.17 da p.152 (funções), Desafio 5.3 da p.165 (matrizes), Desafio 5.4 da p.165 ($\mathbb{R}^n$).

[4] Um produto interno em V induz uma norma (tamanho do vetor) e uma distância. Veja um exemplo de norma no espaço vetorial das funções na Seção 5.6 da p.151.

Exemplo 5.1 *Considere* $\mathbf{v} = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0), \mathbf{w} = (-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5)$. *Calcule* $\|\mathbf{v}\|$, $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$ *e* $d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Solução: $\|\mathbf{v}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$. *Logo,* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{30}$.
$\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = (1)(-1) + (2)(2) + (3)(-3) + (4)(4) + (0)(-5) = -1 + 4 - 9 + 16 + 0 = 10$.
$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 2)^2 + (3 - (-3))^2 + (4 - 4)^2 + (0 - (-5))^2} = \sqrt{65}$. ■

Definição 5.5 (vetor unitário e normalização) *Diz-se que* $\widehat{\mathbf{v}}$ *é unitário se* $\|\widehat{\mathbf{v}}\| = 1$ *(acento circunflexo é utilizado para indicar que um vetor é unitário). Dado* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *pode-se verificar que* $\widehat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ *é unitário e tem a mesma direção e o mesmo sentido de* $\mathbf{v}$. *Dizemos que* $\widehat{\mathbf{v}}$ *é a* ***normalização*** *de* $\mathbf{v}$.

Exemplo 5.2 *Normalize o vetor* $\mathbf{v} = (1,\ -2,\ 0,\ -2,\ 0) \in \mathbb{R}^5$.

Solução: *Calculando* $\|\mathbf{v}\|^2 = (1)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 = 1 + 4 + 1 = 9$. *Logo,* $\|\mathbf{v}\| = 3$. *Assim* $\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/3 = (1/3,\ -2/3,\ 0,\ -2/3,\ 0)$. ■

Lema 5.6 (ortogonalidade) *Os vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *são perpendiculares entre si se, e somente se,* $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$.
Utilizamos a notação $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ *para indicar que* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são perpendiculares entre si.*

Prova: Considere o paralelogramo P de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Temos as seguintes equivalências:
— $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares entre si;
— P é um retângulo;
— comprimento das diagonais de P ($\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$) são iguais pois (geometria euclidiana) um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, o comprimento de suas diagonais é igual);
— $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$;
— $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$;
— $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} \,|\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$;
— $\|\mathbf{u}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$ pelo Lema 5.2 da p.138;
— $2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = -2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle$ simplificando os dois lados da expressão;
— $4 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$;
— $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$. ■

Definição 5.7 (vetores ortogonais) *Dizemos que* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são* ***ortogonais*** *se* $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$.

Assim vetores perpendiculares do $\mathbb{R}^n$ são ortogonais entre si.

Observação 5.2 *Note que o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor, isto é,* $\mathbf{0} \perp \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v}$.

Observação 5.3 *O ângulo entre dois vetores é definido na Seção 5.7 da p.155.*

Teorema 5.8 (de Pitágoras generalizado) *Os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais entre si se, e somente se,* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Prova: Pela definição de norma e as propriedades do Lema 5.2 da p.138, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$. Assim $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ se, e somente se, $2 \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$, ou seja, se, e somente se, $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$. ■

Definição 5.9 (conjunto ortogonal) *Diz-se que o conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortogonal se os vetores são dois a dois ortogonais* ($\langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_j \rangle = 0 \;\; \forall i \neq j$) *ou se* $p = 1$.

Lema 5.10 (conjunto ortogonal é LI) *Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos é linearmente independente.*

Prova: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ortogonal. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \mathbf{v}_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \right\rangle = \langle \mathbf{v}_j \,|\mathbf{0} \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_j \,|\mathbf{v}_i \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j \\
&\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\text{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)
\end{aligned}$$

■

Definição 5.11 (conjunto ortonormal) *Diz-se que o conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortonormal se, além de ser ortogonal, todos os seus vetores são unitários, isto é, se*

$$\langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \text{onde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}.$$

Exemplo 5.3 *Verifique que* $\{(1,0,1,0,1,0),\; (0,1,0,1,0,1),\; (-1,0,1,2,0,-2)\}$ *é ortogonal em* $\mathbb{R}^6$*. Determine um conjunto ortonormal que gere o mesmo espaço.*

Solução: De fato, $\langle (1,0,1,0,1,0) \,|(0,1,0,1,0,1) \rangle = 1(0)+0(1)+1(0)+0(1)+1(0)+0(1) = 0$,
$\langle (1,0,1,0,1,0) \,|(-1,0,1,2,0,-2) \rangle = 1(-1)+0(0)+1(1)+0(2)+1(0)+0(-2) = -1+1 = 0$,
$\langle (-1,0,1,2,0,-2) \,|(0,1,0,1,0,1) \rangle = -1(0)+0(1)+1(0)+2(1)+0(0)+-2(1) = 2-2 = 0$.

Para gerar um conjunto ortonormal, basta normalizar cada vetor. Como $\|(1,0,1,0,1,0)\| = \sqrt{3} = \|(0,1,0,1,0,1)\|$ e $\|(-1,0,1,2,0,-2)\| = \sqrt{10}$, um conjunto ortonormal é
$\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,0,1,0),\; \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0,1,0,1),\; \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,0,1,2,0,-2)\}$ ■

5.2 Complemento Ortogonal

Definição 5.12 (complemento ortogonal) *Seja* H *um subespaço vetorial. O* ***complemento ortogonal*** *de* $H \subset \mathbb{R}^n$ *é o conjunto dos vetores ortogonais a todos os vetores de* H*, denotado por* $H^\perp$ *(lê-se* H *perp), definido por*

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle = 0 \;\; \text{para todo } \mathbf{u} \in H\}.$$

Exemplo 5.4 (exemplos no plano e espaço) *Aplique a definição acima e verifique a tabela abaixo:*

Em	H	$H^\perp$
$\mathbb{R}^2$	eixo x	eixo y
$\mathbb{R}^2$	eixo y	eixo x
$\mathbb{R}^2$	a reta $y = x$	a reta $y = -x$
$\mathbb{R}^2$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3$	eixo x	o plano yz $(x = 0)$
$\mathbb{R}^3$	o plano xy $(z = 0)$	o eixo z
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbf{0}$

Lema 5.13 (propriedades básicas do complemento ortogonal) *Considere $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial gerado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$. Então:*
(a) $H^\perp$ é subespaço vetorial;
(b) $H^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v} | \mathbf{u}_i \rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$;

Prova: (a) Como $\mathbf{0}$ é ortogonal a todo vetor, $\mathbf{0} \in H^\perp$. Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^\perp$. Pela bilinearidade do produto interno, $\langle \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^\perp$, $\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in H$. Logo, $\langle \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in H$, ou seja, $\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H^\perp$

(b) Seja $W = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v} | \mathbf{u}_i \rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$. Como $\mathbf{u}_i \in H$, é claro que $H^\perp \subset W$. Vamos mostrar a inclusão contrária, isto é, que $W \subset H^\perp$. Seja $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{v} \in H$. Como os $\mathbf{u}_i's$ geram H, $\mathbf{v} = \sum_i a_i \mathbf{u}_i$. Pela bilinearidade do produto interno, $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle =$
$\left\langle \mathbf{w} \,\middle|\, \sum_i a_i \mathbf{u}_i \right\rangle = \sum_i a_i \langle \mathbf{w} | \mathbf{u}_i \rangle = 0$ pois $\mathbf{w} \in W$ implica que $\langle \mathbf{w} | \mathbf{u}_i \rangle = 0$. ∎

A importância do item (b) do Lema anterior é que caracterizamos o complemento ortogonal fazendo o produto interno com um **número finito** de vetores. Isto permite calcular o complemento ortogonal resolvendo um sistema linear, como mostramos no próximo lema. Note que ele relaciona **perpendicularidade** com **transposição de matriz**.

Exemplo 5.5 *Dados $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, defina $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle = b\}$. Prove que existe $\mathbf{v}_0 \in H$ tal que $H = \mathbf{v}_0 + \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}^\perp$.*
Solução: *Veja prova do Lema 2.29 da p.56. Isto mostra que H é a translação do complemento ortogonal do espaço gerado por $\mathbf{u}$. Pelo mesmo lema, $\dim(\operatorname{span}\{\mathbf{u}\}^\perp) = n - 1$.* ∎

Lema 5.14 (calculando complemento ortogonal) *Dado $H \subset \mathbb{R}^n$ subespaço gerado por $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ obtemos uma base para $H^\perp$ resolvendo o sistema homogêneo $A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$, onde*
$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$
Desta forma, $H = \operatorname{Im} A$ e $H^\perp = \operatorname{Nuc}(A^T)$.

Prova: Segue pois são equivalentes:
— $\mathbf{v} \in H^\perp$;
— $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u}_i \rangle = 0$, para $i = 1, \ldots, m$ (pelo Lema 5.13 (b));
— $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_p | \mathbf{v} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{u}_p \rightarrow \end{bmatrix} \mathbf{v} = A^T\mathbf{v}$;
— $\mathbf{v} \in \operatorname{Nuc}(A^T)$. ∎

Observação 5.4 *Mais propriedades do complemento ortogonal são explorados no Lema 5.21 da p.151.*

Exemplo 5.6 *Determine uma base para $H^\perp$ se:*

(a) $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$; (b) $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Solução: *(a) Seja* $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$. *Pelo Lema 5.14 (base do complemento ortogonal), resolvemos* $A^T\mathbf{v} = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right], \quad \left\{\begin{array}{rcl}x_1 & = & \boxed{\begin{array}{r}1\\-2\\1\end{array}}\begin{array}{l}x_3\\x_3\\x_3\end{array}\\x_2 & = & \\x_3 & = & \end{array}\right. .$$

$\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ *é base de* $H^\perp$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 1\\4 & 5 & 1\end{bmatrix}$. *Pelo Lema 5.14 (base do complemento ortogonal), resolvemos o sistema*

$$A^T\mathbf{v} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Escalonando totalmente A^T *obtemos* $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ *(a última linha zera). Fazendo* $z = s, w = t, x = s + 2t, y = -2s - 3t$. *Logo,* $(x, y, z, w) = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1)$, *ou seja uma base é* $\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$. ∎

Observação 5.5 (Software Algébrico) *Veja no Apêndice B.9 da p.245 como calcular complemento ortogonal com* `orthogonal_complement`.

Lema 5.15 (menor distância e ortogonalidade) *Considere H um subespaço vetorial. Suponha que exista $\mathbf{y} \in H$ tal que $\mathbf{b} - \mathbf{y} \in H^\perp$. Então $d(\mathbf{y}, \mathbf{b}) \le d(\mathbf{h}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{h} \in H$, ou seja, $\mathbf{y}$ é o elemento de H mais perto de $\mathbf{b}$.*

Prova: Defina $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{h}$ para um $\mathbf{h} \in H$ qualquer. Como $\mathbf{y} - \mathbf{h} \in H$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ por hipótese. Pelo Teorema 5.8 da p.139 (Pitágoras),

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \ge \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2.$$

Assim $d(\mathbf{y}, \mathbf{b}) \le d(\mathbf{h}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{h} \in H$. ∎

Dado subespaço vetorial $H \subset \mathbb{R}^n$, pode-se provar que[1] **existe um único** $\mathbf{y} \in H$ com a propriedade acima, conforme ilustra a Figura 5.2. Isto motiva a definição de **projeção ortogonal**.

[1] Pelo Lema 5.14, $\mathbf{b} - \mathbf{y} \in H^\perp$ se, e somente se, $A^T\mathbf{y} = A^T\mathbf{b}$, que possui solução única pelo Lema 5.22.

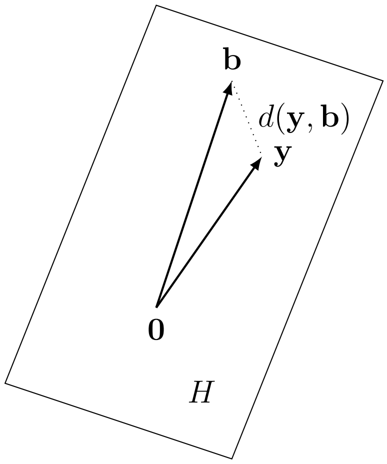


Figura 5.2: Projeção Ortogonal

Definição 5.16 (projeção ortogonal) *Dado $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, existe um único vetor $\mathbf{y} \in H$ tal que $d(\mathbf{y}, \mathbf{b})$ é mínimo. Dizemos que $\mathbf{y}$ é a* ***projeção ortogonal*** *de $\mathbf{b}$ sobre H e denotamos $P_H\mathbf{b} = \mathbf{y}$.*

Veremos como **calcular** a projeção ortogonal na Seção 5.4 da p.148.

5.3 Aplicação: Mínimos Quadrados

Já vimos (veja p.58 e Observação 3.4 da p.70) que o sistema linear $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ tem solução(ões) se, e somente se, $\mathbf{b} \in \operatorname{Im}(A)$. O que fazer quando $\mathbf{b} \notin \operatorname{Im}(A)$? A resposta "o problema não tem solução" pode ser insatisfatória, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.7 *Imagine, de forma super-simplificada, que um paciente deva fazer uma refeição consistindo de arroz e carne, de forma a totalizar 150g de alimento com 450 Kcal e 25g de gordura. Dado que 1g de arroz tem 2.5Kcal e 0.03g de gordura e que a mesma quantidade de carne tem 3.1 Kcal e 0.21g de gordura, que quantidade de cada alimento deve ser ingerida?*
Solução: *Seja x a quantidade de arroz, em gramas, e y a quantidade de carne. Precisamos de uma solução para o sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 150 \\ 2.50x & + & 3.10y & = & 450 \\ 0.03x & + & 0.21y & = & 25. \end{array}\right. \quad ou \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right].$$

Pode-se verificar, no entanto, que este é um sistema sem solução. Mas esta resposta não há de ajudar muito o nosso paciente!

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix}.$$

Isto significa que 38g de arroz e 113 de carne é uma "quase-solução": 151g de alimento (ao invés de 150g), 445.3Kcal (ao invés de 450Kcal) e 24.87g de gordura (ao invés de 25g). Para fins de alimentação, estes erros são totalmente aceitáveis. ∎

Outras aplicações são a aproximação de dados por polinômios, extrapolação e suavização de dados. Veja em `en.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares_(mathematics)`.

O que fazer quando $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(A)$?

Neste caso não existe $\mathbf{z}$ tal que $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$. Assim $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b}) \neq 0$ para todo $\mathbf{z}$ no domínio de A. Observando a Figura 5.3, o melhor que podemos fazer é **minimizar** esta distância: determinar $\mathbf{z}$ tal que a distância $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b})$ assuma o menor valor possível.

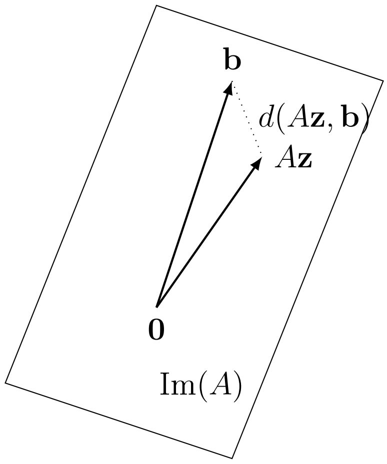


Figura 5.3: Mínimos Quadrados

Definição 5.17 (solução de mínimos quadrados) *Uma "quase-solução" do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, chamada de **solução de mínimos quadrados**[1], é um vetor $\mathbf{z}$ tal que $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq d(A\mathbf{x}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x}$ no domínio de A.*

Teorema 5.18 (mínimos quadrados) *Se $\mathbf{z}$ é uma solução[2] de $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$, então $\mathbf{z}$ é uma solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Prova: Se $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$, então $A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{z}) = 0$. Definindo $H = \mathrm{Im}\, A$, pelo Lema 5.14 da p.141, $H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T)$ e portanto $\mathbf{b} - A\mathbf{z} \in H^\perp$. Pelo Lema 5.15 da p.142, $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{h}, \mathbf{b})$ para todo $h \in H = \mathrm{Im}\, A$. Logo $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq d(A\mathbf{x}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x}$ no domínio de A. ∎

Relação entre Projeção Ortogonal e Mínimos Quadrados

Observação 5.6 *Na linguagem da Definição 5.16 da p.143 (projeção ortogonal) resolver o sistema $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados equivale a resolver o sistema $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$, que sempre tem solução pois é claro que $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$.*
Se um sistema linear tem solução no sentido clássico, então $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$ e portanto $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} = \mathbf{b}$. O sistema $A\mathbf{z} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$ é idêntico ao sistema original $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$. As soluções de mínimo quadrado coincidem, neste caso, com as soluções clássicas.

[1] O nome vem de minimizar a distância, que é medida tomando a soma dos quadrados das diferenças entre as coordenadas.

[2] O Lema 5.22 da p.151 prova que o sistema $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ sempre possui solução.

Exemplo 5.8 *Resolva, no sentido dos mínimos quadrados,* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solução: $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. *Assim,* $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \end{bmatrix}$ *e portanto,* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. ∎

Observação 5.7 (Software Algébrico) *Pode-se resolver problema de mínimos quadrados com o Maxima.* `M: matrix( [1,2], [2,1], [2,1]); b: [3,3,5]; Mt:transpose(M);` *Agora resolvemos o sistema com* `linsolve_by_lu(Mt.M,Mt.b);` *Veja mais no Apêndice B.10 da p.245.*

Exemplo 5.9 *Determine a equação da reta que melhor aproxima, no sentido dos mínimos quadrados, os pontos* $(1,6), (2,5), (3,7)$ *e* $(4,10)$.

Solução: *Queremos determinar* $a, b, \in \mathbb{R}$ *tais que a equação da reta* $y = ax + b$ *é satisfeita pelos quatro pontos. Assim queremos resolver o sistema (porque?):*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Este sistema não tem solução (verifique) e vamos resolvê-lo no sentido de mínimos quadrados. Assim vamos resolver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo obtemos $a = 7/5$ *e* $b = 7/2$. *Assim a equação da reta* $y = (14x + 35)/10$. *Na Figura 5.4 apresentamos os dados e esta reta (Fonte: Wikipedia, File:Linear least squares example2.svg).* ∎

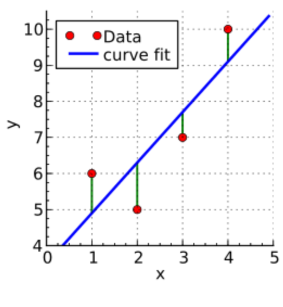


Figura 5.4: Aproximando pontos.

Exemplo 5.10 [2] *Jogamos uma moeda 90 vezes e contamos o número de vezes que apareceu cara após 30, 60 e 90 jogadas. O resultado está na tabela abaixo.*

jogadas	30	60	90
caras	16	34	51

A moeda tem uma certa proporção m de caras com relação ao total de jogadas.Determine m.
Solução: *Precisamos resolver o sistema abaixo que não possui solução (exata).*

$$\begin{cases} 30m &= 16 \\ 60m &= 34 \\ 90m &= 51 \end{cases}$$

Isto porque o vetor $\mathbf{b} = (16, 34, 51) \notin \operatorname{span}\{(30, 60, 90)\} = \mathit{Im}\,A$, *onde* $A = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix}$.
Precisamos resolver $A^T Am = A^T\mathbf{b}$. *Assim,* $(900 + 3600 + 8100)m = 7110 = 12600m$. *Assim* $m = \frac{7110}{12600} \approx 0.564$. *A reta com coeficiente angular* $m \approx 0.564$*, que melhor aproxima os dados, é mostrada na Figura 5.5.* ■

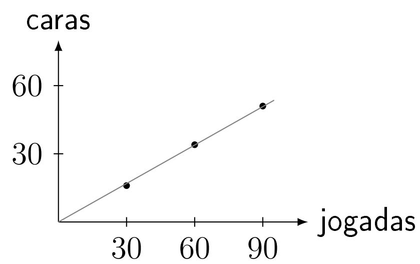


Figura 5.5: Jogando uma Moeda

Exemplo 5.11 *A equação que modela um determinado fenômeno físico é dada por* $f(t) = at^2 + bt + c$ *(por exemplo,* f *pode ser a posição de um corpo uniformemente acelerado). Com o objetivo de se determinar os parâmetros* a, b *e* c*, uma série de experimentos são realizados, com os seguintes resultados:*

As posições medidas foram:

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	6.5	11.2	17.7	27.1	39.0

Determine os parâmetros a, b *e* c *que melhor ajustam os dados experimentais no sentido dos mínimos quadrados.*
Solução: *Gostaríamos que, para determinada escolha de* a, b *e* c*, fossem satisfeitas simultaneamente as equações*

$$\begin{cases} a \times 1^2 + b \times 1 + c = 6.5 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 11.2 \\ a \times 3^2 + b \times 3 + c = 17.7 \\ a \times 4^2 + b \times 4 + c = 27.1 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 39.0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 11.2 \\ 17.7 \\ 27.1 \\ 39.0 \end{bmatrix}.$$

[2]Adaptado de [6].

A solução aproximada é obtida resolvendo-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.5 \\ 11.2 \\ 17.7 \\ 27.1 \\ 39.0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 979 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1619.2 \\ 385.4 \\ 101.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.24 \\ 0.68 \\ 4.68 \end{bmatrix}.$$

Para estes valores dos parâmetros, o modelo prevê que (compare com valores originais):

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	6.6	11.0	17.88	27.24	39.08

■

Exemplo 5.12 [3] *As cédulas de dinheiro de um certo país tem médias diferentes de tempo de circulação de acordo com o valor dados pela tabela abaixo. Quanto tempo você espera que uma nota de 25 dure?*

valor da cédula	*1*	*5*	*10*	*20*	*50*	*100*
tempo médio (anos)	1.5	2	3	5	9	20

Solução: *Supondo que exista uma relação linear entre o tempo médio y em função do valor x da cédula, temos que determinar k e m de forma aproximada tal que $y = k + mx$. Assim devemos resolver o sistema* $\begin{cases} k + 1m &= 1.5 \\ \vdots &= \vdots \\ k + 100m &= 20 \end{cases}$*, que é impossível. Considere*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 50 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$$

Determinamos os coeficientes k e m resolvendo $A^T A\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ com auxílio de software, obtendo $\mathbf{z} = (1.05, 0.18)$. Portanto, $k = 1.05$ e $m = 0.18$. O gráfico abaixo mostra a reta aproximada $y = 0.18x + 1.05$ e os dados. Colocando $x = 25$ na equação da reta, determinamos que a cédula deve durar 5.55 anos, isto é entre 5 e 6 anos. ■

Exemplo 5.13 *Considere os pontos $(1, 3), (3, 2)$ e $(6, 1)$. Sabendo que devem satisfazer, de forma aproximada ao modelo $y = ae^x + b \log x$, determine o sistema cuja solução aproxima os coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$.*

[3] Adaptado de [6].

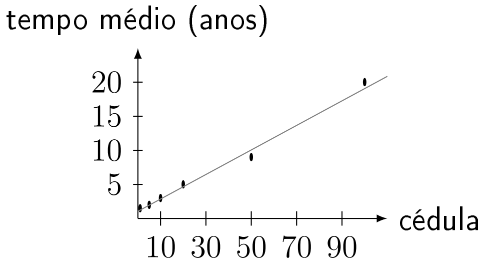


Figura 5.6: Tempo médio de duração da cédula

Solução: *Devemos ter:* $3 = ae^1 + b\log 1 = ae$, $2 = a^3 + b\log 3$, $1 = ae^6 + b\log 6$. *Assim queremos resolver o sistema (sobredeterminado):*

$$\begin{bmatrix} e^1 & 0 \\ e^3 & \log 3 \\ e^6 & \log 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora basta aplicar o método dos mínimos quadrados a este sistema. ■

Exemplo 5.14 (aproximando uma função por um polinômio) *Aproxime a função* $y = f(x) = e^x$ *no intervalo* $[1, 10]$ *por um polinômio de grau 2 e por um polinômio de grau 3.*
Solução: *Considere o polinômio de grau 2* $p(x) = ax^2 + bx + c$. *Queremos determinar* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $p(x) = f(x)$ *para* $x \in [1, 10]$. *Nestes termos o problema não é possível, mas podemos escolher alguns pontos no intervalo. Como são três variáveis* (a, b, c) *devemos escolher no mínimo 3, mas podemos escolher mais e resolver por mínimos quadrados. Se escolhermos 10 pontos* $1, 2, \ldots, 10$ *obtemos o sistema com 10 equações e 3 variáveis*

$$\begin{cases} a + b + c & = e^1, \\ 4a + 2b + c & = e^2, \\ 9a + 3b + c & = e^3, \\ 16a + 4b + c & = e^4, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ 100a + 10b + c & = e^{10}, \end{cases}$$

que pode ser resolvido (no computador) com o método dos mínimos quadrados.

Podemos fazer algo semelhante com polinômio de grau 3 (ou qualquer grau: faça isso) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *e obter um sistema com 10 equações e 4 variáveis:*

$$\begin{cases} a + b + c + d & = e^1, \\ 8a + 4b + 2c + d & = e^2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ 1000a + 100b + 10c + d & = e^{10}, \end{cases}$$

que pode ser resolvido (no computador). A matriz obtida é chamada de matriz de Vandermonde (ver Wikipedia). ■

5.4 Aplicação: Projeção Ortogonal e Reflexão

Convidamos o leitor a se familiarizar com uma **projeção ortogonal**[4] através da Figura 4.5 da p.97. e da Definição 5.16 da p.143. Até agora não detalhamos como calculá-la. Vamos

[4] Veja também projeção oblíqua no Desafio 5.1 da p.165.

fazer isto agora.

Lema 5.19 (como calcular projeção ortogonal) *Considere* $H = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. *Defina* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. *Dado* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, *sua* ***projeção ortogonal*** $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z}$, *onde* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ *é solução do sistema* $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ *(um problema de mínimos quadrados!).*

Prova: Projetar ortogonalmente (Definição 5.16 da p.143) significa obter coeficientes $z_i \in \mathbb{R}$ que minimizam a distância entre os vetores $\sum z_i\mathbf{v_i} \in H$ e $\mathbf{b}$. Assim queremos determinar $z_i \in \mathbb{R}$ tais que $d(\sum z_i\mathbf{v_i},\ \mathbf{b})$ seja mínimo.

Definindo $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k)$, temos $A\mathbf{z} = \sum z_i\mathbf{v_i}$. Pelo Lema 5.15 da p.142, minimiza-se $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b})$ tomando $\mathbf{z}$ tal que $A\mathbf{z} - \mathbf{b} \in H^\perp$. Pelo Lema 5.14 da p.141 basta que $A\mathbf{z} - \mathbf{b} \in \operatorname{Nuc}(A^T)$, ou seja, que $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ e $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z}$. ■

Lema 5.20 (fórmula da reflexão) *Se* $H \subset \mathbb{R}^n$ *é um subespaço vetorial e* P_H *a projeção ortogonal neste espaço, a reflexão* R_H *em torno de* H *é dada por* $R_H = 2P_H - I$, *onde* I *é a identidade.*

Prova: Veja Figura 5.7. ■

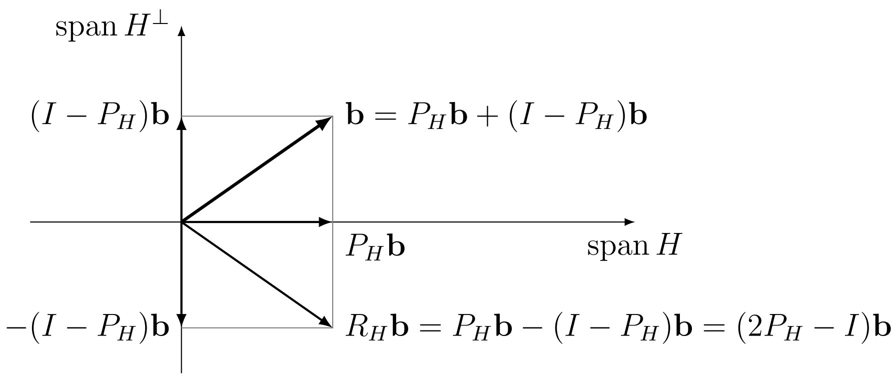


Figura 5.7: Se P_H é projeção ortogonal em H, reflexão $R_H = 2P_H - I$.

Exemplo 5.15 *Calcule* $P_H\mathbf{b}$ *(projeção ortogonal em* H*) e* $R_H\mathbf{b}$ *(reflexão em torno de* H*) se* $\mathbf{b} = (2,\ 0,\ 0)$ *e:*

(a) $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$; *(b)* $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$.

Solução: *(a) Definindo* $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$, *devemos resolver:*

$$A^TA\mathbf{z} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}\mathbf{z} = A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}14 & 20\\20 & 29\end{bmatrix}\mathbf{z} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix}-11/3\\8/3\end{bmatrix}.$$

Portanto, $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

Como $R_H\mathbf{b} = (2P_H - I)\mathbf{b} = 2P_H\mathbf{b} - \mathbf{b}$, $R_H\mathbf{b} == 2 \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$.

(b) Definindo $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, *devemos resolver:* $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$. *Como* $A^TA = 14$, $A^T\mathbf{b} = 2$, $\mathbf{z} = 1/7$. *Portanto,* $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$.

Como $R_H\mathbf{b} = (2P_H - I)\mathbf{b} = 2P_H\mathbf{b} - \mathbf{b}$, $R_H\mathbf{b} = 2 \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$. ■

Observação 5.8 *Refaça o exemplo anterior item (b) para provar que que a matriz de projeção ortogonal na direção* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *é:* $P_{\text{span}\{\mathbf{v}\}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$.

Exemplo 5.16 *Considere* $H = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ *e* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Calcule* $P_H\mathbf{b}$.

Solução: *Definindo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, *devemos resolver:*

$$A^TA\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} = A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 8/21 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 \\ 8/21 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{8}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$. ■

Observação 5.9 (Software Algébrico) *Veja no Apêndice B.11 da p.245 como calcular uma projeção e uma reflexão com o* `Maxima`.

Projeção em Bases Ortogonais

Observação 5.10 *Se a base de* H *é ortogonal, o produto* A^TA *será uma matriz diagonal (porque?) e o sistema* $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ *poderá ser resolvido facilmente. Isto ocorreu no exemplo anterior.*

Projeção em Bases Ortonormais

Neste caso $A^TA = I$ *(identidade). Assim* $\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$ *e portanto* $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z} = AA^T\mathbf{b}$. *Concluímos que* $P_H = AA^T$ *se a base de* H ***é ortonormal***.

5.5 ⋆Mínimos Quadrados e Projeção: Teoria[1]

Lema 5.21 (propriedades do complemento ortogonal) *Considere $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. Então:*
(a) $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$; *(b) $H + H^\perp = \mathbb{R}^n$.*

Prova: (a) Se $\mathbf{v} \in H \cap H^\perp$, então $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v}\rangle = 0$, o que implica que $\mathbf{v} = 0$.

(b) Suponha que a base de H é $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$. Defina $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_p \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Assim $H = \operatorname{Im} A$. Pelo Lema 5.14 da p.141, $H^\perp = \operatorname{Nuc} A^T$. Assim $\dim(H^\perp) + \dim(H) = \dim \operatorname{Nuc} A^T + \dim \operatorname{Im} A$. Pelo Lema 4.15 da p.104 (dimensão do espaço-linha é igual a dimensão do espaço-coluna), $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T$. Assim $\dim \operatorname{Nuc} A^T + \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Nuc} A^T + \dim \operatorname{Im} A^T$. Agora pelo Teorema 4.12 da p.102 (Teorema do núcleo-imagem) $\dim \operatorname{Nuc} A^T + \dim \operatorname{Im} A^T = n$, pois o domínio de A^T é $\mathbb{R}^n$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ é base de $H^\perp$, por (a) $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ é LI e como $p + q = n$ geram o $\mathbb{R}^n$. ■

Lema 5.22 (existência de mínimos quadrados) *Dada uma matriz A qualquer e $\mathbf{b}$ um vetor qualquer (compatível com a dimensão de A de modo que o sistema faça sentido), o sistema $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ sempre possui uma solução $\mathbf{x}_0$. Mais ainda $\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0$ é **único** (mesmo que exista mais de um $\mathbf{x}_0$ solução).*

Prova: Defina $L : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A^T$ como a restrição de A^T ao subespaço vetorial $\operatorname{Im} A$. Assim $L = A^T$ em $\operatorname{Im} A$. Vamos provar que L é uma bijeção linear. Injetividade: Pelo Lema 5.14 da p.141, $\operatorname{Nuc}(A^T)$ é o complemento ortogonal da $\operatorname{Im} A$ e pelo Lema 5.21 (a), $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Nuc}(A^T) = \mathbf{0}$. Logo $\operatorname{Nuc} L = \operatorname{Nuc}(A^T) \cap \operatorname{Im} A = \mathbf{0}$. Sobrejetividade: Pelo Lema 4.15 da p.104, $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^T)$. Assim $\operatorname{Im} L \subset \operatorname{Im} A^T$ e, pelo teorema do núcleo imagem, possuem mesma dimensão. Logo $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} A^T$. Assim, para todo $\mathbf{k} = A^T\mathbf{b} \in \operatorname{Im} A^T$, **existe um único** $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Im} A$ tal que $A^T\mathbf{y}_0 = \mathbf{k} \in \operatorname{Im} A^T$. Como $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Im} A$, existe pelo menos um $\mathbf{x}_0$ tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$, e portanto $A^T A\mathbf{x}_0 = A^T\mathbf{y}_0 = \mathbf{k} = A^T\mathbf{b}$. ■

5.6 ⋆Aplicação: Aproximando Funções por Polinômios (ou outras funções)[1]

Para dizer que uma função está próxima de outra precisamos definir distância entre funções. Uma forma de fazer isto é definir um produto interno no espaço vetorial das funções e, com este produto interno, definir norma, distância e ortogonalidade entre funções, tal qual fizemos na p.138.

A definição mais comum de **produto interno** em espaços vetoriais de funções é feita por uma integral. Nos concentramos em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e definimos o produto interno entre duas funções[5] $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $\langle f \,|g\rangle = \int_a^b f(s)g(s)\, ds$. Este produto interno possuirá todas as propriedades do Lema 5.2 da p.138. Este produto interno induz uma **norma** de função pela Definição 5.3 da p.138 e uma distância entre funções pela Definição 5.4 da

[1] A leitura desta seção é opcional.

[5] Tecnicamente funções quadrado integráveis com relação a integral de Lebesgue. O leitor aqui pode pensar em funções contínuas ou contínuas por partes.

p.138. Assim $\|f\|^2 = \displaystyle\int_a^b (f(s))^2\,ds$ e e $d(f,g) = \sqrt{\left(\displaystyle\int_a^b |f(s)-g(s)|^2\,ds\right)}$. Esta norma e a distância possuirão todas as propriedades da Observação 5.1 da p.138.

Exemplo 5.17 *Verifique que* $\langle f\,|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 f(s)g(s)\,ds$ *satisfaz todas propriedades do produto interno do Lema 5.2 da p.138.*
Solução: *A simetria decorre de* $\int_{-1}^1 f(s)g(s)\,ds = \int_{-1}^1 g(s)f(s)\,ds$. *A bilinearidade decorre da linearidade da integral:* $\int_{-1}^1(\alpha f(s)+g(s))h(s)\,ds = \alpha\int_{-1}^1 f(s)h(s)\,ds + \int_{-1}^1 g(s)h(s)\,ds$. *A positividade é mais delicada. Se* f *não é nula, então, por continuidade, ela é não nula num certo intervalo não-degenerado. Com isto,* $\int_{-1}^1 f^2(s)\,ds > 0$. ■

Exemplo 5.18 *Considere o produto interno do Exemplo 5.17 e as funções* $f(t) = t^2, g(t) = 1-t$, $h(t) = 3t$.
(a) *Determine* $\|f\|, \|g\|$ *e* $\langle f\,|g\rangle$.
(b) *Mostre que* f *e* h *são ortogonais.*
(c) *Determine* $\widehat{\mathbf{h}}$ *um múltiplo de* h *tal que* $\|\widehat{\mathbf{h}}\| = 1$.

Solução: *(a) Como* $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 f^2(t)\,dt = \int_{-1}^1 (t^2)^2\,dt = \int_{-1}^1 (t^4)\,dt = t^5/5|_{-1}^1 = 1/5 - (-1/5) = 2/5$. *Logo,* $\|f\| = \sqrt{2/5}$.

Como $\|g\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 g^2(t)\,dt = \int_{-1}^1 (1-t)^2\,dt = \int_{-1}^1 (1-2t+t^2)\,dt = (t-t^2+t^3/3)|_{-1}^1 = 2$. *Logo,* $\|g\| = \sqrt{2}$.

Calculando $\langle f\,|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2(1-t)\,dt = \int_{-1}^1 (t^2-t^3)\,dt = (t^3/3 - t^4/4)|_{-1}^1 = 2/3$.

(b) Calculando, $\langle f\,|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^1 t^2 3t\,dt = \int_{-1}^1 3t^3\,dt = 3t^4/4|_{-1}^1 = 3(1)^4/4 - 3(-1)^4/4 = 3-3 = 0$.

(c) Como, $\|g\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 f^2(t)\,dt = \int_{-1}^1 (3t)^2\,dt = \int_{-1}^1 9t^2\,dt = 3t^3|_{-1}^1 = 3(1)^3 - 3(-1)^3 = 3+3 = 6$. *Portanto,* $\|g\| = \sqrt{6}$. *Logo tome* $\widehat{\mathbf{g}} = g/\sqrt{6} = 3t/\sqrt{6}$. ■

Como determinar uma função próxima de outra?

Vamos explicar por um exemplo concreto: Como determinar o polinômio $p(x) = ax^2+bx+c$ mais próximo de uma função $f(x)$?
Considere $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$, uma base para o subespaço vetorial H dos polinômios de grau máximo 2.
Queremos minimizar $d(p,f)$ para $p \in H$. A solução é tomar $p = P_H f$, que minimiza a distância pois é a projeção ortogonal de f no espaço H. Pelo Lema 5.15 da p.142, $p - f \in H^\perp$ (ortogonal a H). Assim devemos ter $\langle p-f\,|p_i\rangle = 0$ para $i = 1,2,3$ pois $\{p_1,p_2,p_3\}$ é base de H (similar ao Lema 5.13 da p.141). Como temos três variáveis $a,b,c \in \mathbb{R}$ e 3 equações, podemos determinar seus valores. Estude os Exemplos 5.19 e 5.20 e releia esta caixa.

Exemplo 5.19 *Considere o produto interno do Exemplo 5.17 da p.152 e as funções* $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = 3t^2-1$. *Verifique que* $\{f_1,f_2,f_3\}$ *é ortogonal. Considere* H_2 *o espaço* *gerado por* $\{f_1, f_2\}$ *e* H_3 *o espaço gerado por* $\{f_1, f_2, f_3\}$. *Se* $\phi(t) = \exp(t)$, *determine* $P_{H_2}\phi$ *e* $P_{H_3}\phi$.

Solução: *Veja no Apêndice B.12 da p.246 como resolver no* `Maxima` *problema semelhante.*

Deixamos para o leitor verificar os produtos internos: $\langle f_1 \,|\phi\rangle = e^1 - e^{-1}$, $\langle f_1 \,|f_1\rangle = 2$, $\langle f_1 \,|f_2\rangle = 0$, $\langle f_2 \,|f_3\rangle = 0$, $\langle f_1 \,|f_3\rangle = 0$, $\langle f_2 \,|\phi\rangle = 2e^{-1}$, $\langle f_2 \,|f_2\rangle = 2/3$, $\langle f_3 \,|\phi\rangle = 2e^1 - 14e^{-1}$, $\langle f_3 \,|f_3\rangle = 8/5$.

Agora vamos determinar $P_{H_2}\phi = af_1 + bf_2 = p$. *Precisamos que* $\langle p - \phi \,|f_i\rangle = 0$ *para* $i = 1, 2$. *Ou seja,*

$$\begin{cases} \langle p \,|f_1\rangle = \langle \phi \,|f_1\rangle\,, \\ \langle p \,|f_2\rangle = \langle \phi \,|f_2\rangle\,. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \langle af_1 + bf_2 \,|f_1\rangle = \langle \phi \,|f_1\rangle\,, \\ \langle af_1 + bf_2 \,|f_2\rangle = \langle \phi \,|f_2\rangle\,. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} a\,\langle f_1 \,|f_1\rangle + b\,\langle f_2 \,|f_1\rangle = \langle \phi \,|f_1\rangle\,, \\ a\,\langle f_1 \,|f_2\rangle + b\,\langle f_2 \,|f_2\rangle = \langle \phi \,|f_2\rangle\,. \end{cases}$$

Como já calculamos os produtos internos obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2a + 0b & = e^1 - e^{-1} \\ 0a + 2/3b & = 2e^{-1} \end{cases}.$$

Resolvendo obtemos $a = (e^1 - e^{-1})/2$ *e* $b = 3e^1$. *Assim* $P_{H_2}\phi(t) = af_1 + bf_2 = (e^1 - e^{-1})/2 + 3e^1t$.

Agora vamos calcular $P_{H_3}\phi = af_1 + bf_2 + cf_3 = p$. *De forma análoga precisamos determinar* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que:*

$$\begin{cases} a\,\langle f_1 \,|f_1\rangle + b\,\langle f_2 \,|f_1\rangle + c\,\langle f_3 \,|f_1\rangle = \langle \phi \,|f_1\rangle\,, \\ a\,\langle f_1 \,|f_2\rangle + b\,\langle f_2 \,|f_2\rangle + c\,\langle f_3 \,|f_2\rangle = \langle \phi \,|f_2\rangle\,, \\ a\,\langle f_1 \,|f_3\rangle + b\,\langle f_2 \,|f_3\rangle + c\,\langle f_3 \,|f_3\rangle = \langle \phi \,|f_3\rangle\,. \end{cases}$$

Como já calculamos os produtos internos obtemos o sistema (a ortogonalidade da base facilita muito!)

$$\begin{cases} 2a + 0b + 0c & = e^1 - e^{-1}, \\ 0a + 2/3b + 0c & = 2e^{-1}, \\ 0a + 0b + 8/5c & = 2e^1 - 14e^{-1}. \end{cases}.$$

Resolvendo obtemos $a = (e^1 - e^{-1})/2$, $b = 3e^1$ *e* $c = 5/4(e^1 - 7e^{-1})$. *Assim* $P_{H_3}\phi(t) = af_1 + bf_2 + cf_3 = (e^1 - e^{-1})/2 + 3e^1t + 5/4(e^1 - 7e^{-1})(3t^2 - 1)$. *Observe na Figura 5.8 que* P_{H_2} *é razoável e que* $P_{H_3}\phi$ *é praticamente idêntica à função* ϕ. *Para perceber a melhora no erro utilizando* P_{H_3}, *compare os erros* e_2 *e* e_3 *mostrados na figura.* ■

Exemplo 5.20 (série de Fourier) *Vamos aproximar a função* $f(x) = e^{-x}$, *no intervalo* $[0, 1]$, *por uma função da forma* $a_1 \sin(\pi x) + a_2 \sin(2\pi x) + \cdots + a_n \sin(n\pi x)$. *Para isto consideramos, no espaço vetorial das funções contínuas, o produto interno* $\langle g \,|h\rangle = \displaystyle\int_0^1 g(t)h(t)dt$. *O que estamos procurando é a projeção ortogonal de* f *sobre* H_n, *o espaço gerado por* $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, *onde* $s_n(x) = \sin(n\pi x)$.

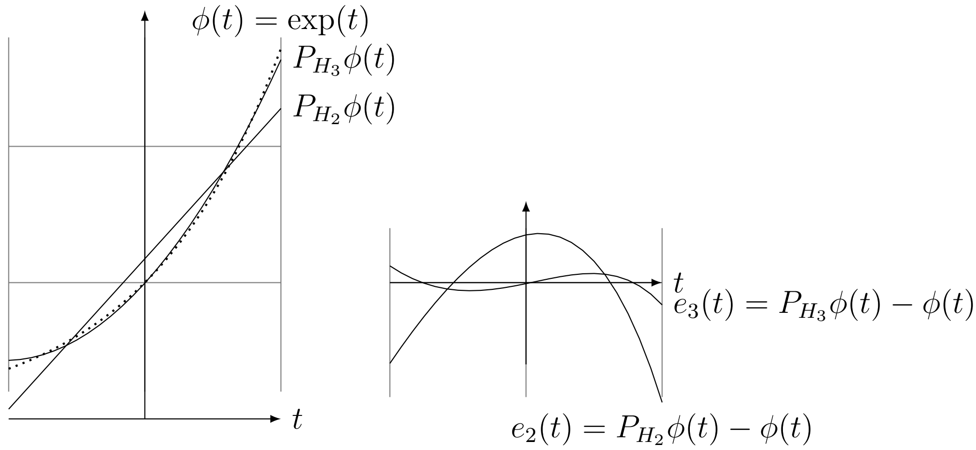


Figura 5.8: Aproximação de ϕ por $P_{H_2}\phi$ e $P_{H_3}\phi$ e erros

Solução: *Pode-se verificar as seguintes fórmulas:*

$$\int_0^1 \sin(k_1 \pi t)\sin(k_2 \pi t)dt = 0 \quad \forall\, k_1 \neq k_2,$$

$$\int_0^1 e^{-t}\sin(k\pi t)dt = \frac{k\pi(e-(-1)^k)}{e(1+k^2\pi^2)} \quad \text{e}$$

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi t)dt = \frac{1}{2}.$$

Fazendo as contas (com auxílio de softwares de cálculo) podemos calcular $P_{H_4}f(t)$ *e* $P_{H_{10}}f(t)$*. Veja na Figura 5.9 o gráfico de* f *e as projeções ortogonais em* H_4 *e* H_{10} *com os respectivos erros.*

Veja na `Wikipedia` *Séries de Fourier.* ■

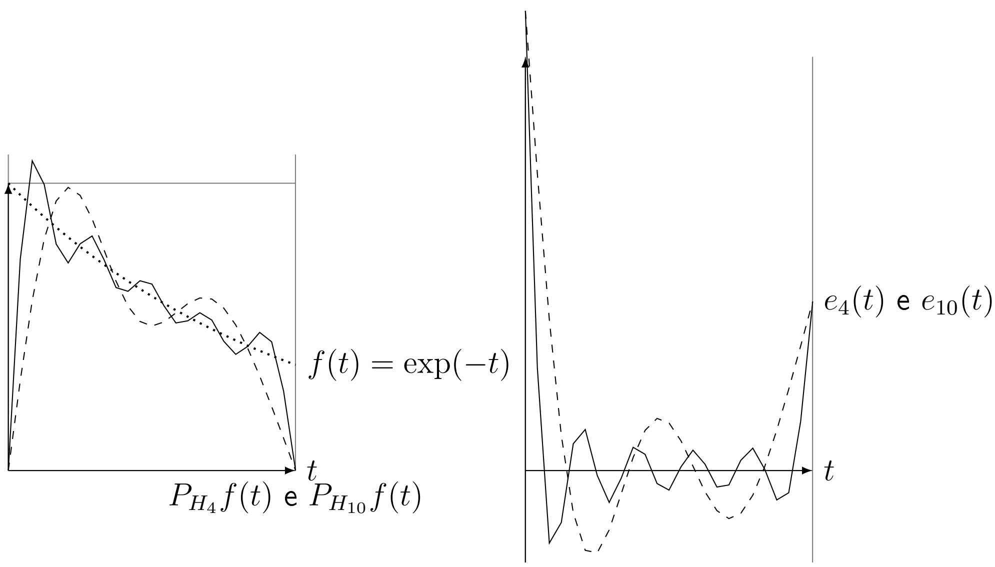


Figura 5.9: Aproximação de f (pontilhado) por $P_{H_4}f$ (tracejado) e $P_{H_{10}}f$ (contínuo) e erros $e_4 = P_{H_4}f - f$ (tracejado) e $e_{10} = P_{H_{10}}f - f$ (contínuo)

5.7 ⋆Cauchy-Schwarz e Ângulo[1]

A Lei dos Cossenos, aplicada ao triângulo cujos lados são $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, onde θ é o ângulo formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (que pode ser pensado igualmente em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), diz que $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$. Como $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v} \,|\, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$, igualando os dois lados e cortando os termos $\|\mathbf{u}\|^2$ e $\|\mathbf{v}\|^2$ obtemos para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-nulos que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Estas idéias podem ser generalizadas através de um importante resultado envolvendo o produto interno e a sua norma associada, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 5.23 (de Cauchy-Schwarz) *Seja V espaço vetorial, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ produto interno e $\|\cdot\|$ a norma associada. Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$:*

$$|\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Prova: Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \le \|\mathbf{u} + x\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + x\mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} + x\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle + 2x \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + x^2 \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2x \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + x^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como o lado direito é uma equação do segundo grau $p(x)$ com $p(x) \ge 0$ para todo x, $p(x) = 0$ deve ter no máximo 1 raiz e portanto $\Delta \le 0$ (porque?). Logo $\Delta = 4((\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle)^2 - (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2) \le 0$ e portanto $(\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle)^2 \le (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2$. Tomando $\sqrt{}$ dos dois lados, e como $\sqrt{k^2} = |k|$, chegamos ao resultado. ■

Corolário 5.24 (desigualdade triangular) *Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (ver Figura 5.10):*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

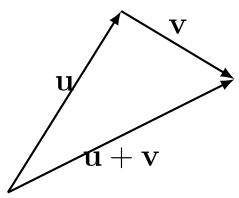


Figura 5.10: Desigualdade Triangular

Prova: De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Usando Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.$$

■

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que, num espaço com produto interno, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não nulos, então $\dfrac{|\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1$ e portanto $-1 \le \dfrac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1$. Isto nos permite definir o ângulo entre dois vetores (mais exatamente, o cosseno deste ângulo).

[1] A leitura desta seção é opcional.

Definição 5.25 (ângulo entre vetores) *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, *definimos o ângulo* $\theta \in [0, 180°]$ *entre eles como a solução de*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v}\,\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Em particular se $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v}\,\rangle = 0$, *então* $\theta = 90°$ *(são ortogonais).*

5.8 ⋆Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt[1]

Dado um conjunto de vetores que gera H,
como determinar um conjunto ortogonal que gera H?

A resposta é dada pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Vamos ilustrar o caso geral ortogonalizando $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. De fato, vamos ver como determinar constantes $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ e $\widetilde{\gamma}$ tais que os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \widetilde{\alpha}\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma}\mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

sejam ortogonais entre si. Note que (porque?) $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. A exigência de que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ seja ortogonal nos permite determinar os coeficientes $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ e $\widetilde{\gamma}$. De fato,

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \widetilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle + \widetilde{\alpha}\,\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle},$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle + \widetilde{\beta}\,\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle},$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \widetilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \widetilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle + \widetilde{\gamma}\,\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle}.$$

Assim devemos definir:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\,\rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\,\rangle}\mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Este procedimento pode ser generalizado (veja Teorema 5.28 da p.161) da seguinte forma:

[1] A leitura desta seção é opcional.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dados $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ defina $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ por

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1; \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2; \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p - \frac{\langle \mathbf{v}_p \,|\mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_p \,|\mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{\langle \mathbf{v}_p \,|\mathbf{u}_{p-1} \rangle}{\langle \mathbf{u}_{p-1} \,|\mathbf{u}_{p-1} \rangle}\mathbf{u}_{p-1}.
\end{aligned}$$

Então $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é ortogonal e $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

Vamos apresentar exemplos. Ao final desta Seção vamos relacionar este processo com projeção ortogonal e provar que o método funciona.

Exemplo 5.21 *Determine uma base ortogonal para*

(a) $H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ *e* *(b)* $W = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\4\\5\end{bmatrix}\right\}.$

(c) Determine base ortonormal para W.

Solução: *(a) Por Gram-Schmidt,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad e \\
\mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} - \frac{20}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/7\\1/7\\-2/7\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$ *é base ortogonal de H.*

(b) Por Gram-Schmidt,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 \;=\; \begin{bmatrix} 2\\3\\4\\0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2\\3\\4\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\3\\4\\0 \end{bmatrix} - \frac{20}{14} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7\\1/7\\-2/7\\0 \end{bmatrix}.$$

Poderíamos usar $\mathbf{u}_2$ exatamente como calculado acima. Mas podemos, por conveniência, eliminar as frações e usar

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix}.$$

Temos agora

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 \;&=\; \begin{bmatrix} 3\\4\\5\\0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3\\4\\5\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3\\4\\5\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \\ &=\; \begin{bmatrix} 3\\4\\5\\0 \end{bmatrix} - \frac{26}{14} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} - \frac{6}{21} \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este resultado, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, revela que $\mathbf{v}_3$ é combinação linear dos vetores anteriores. Assim, $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. Basta ortogonalizar este conjunto, reduzido em relação ao original. $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ já foram calculados. Agora,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 \;&=\; \begin{bmatrix} 0\\3\\4\\5 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0\\3\\4\\5 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0\\3\\4\\5 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} \\ &=\; \begin{bmatrix} 0\\3\\4\\5 \end{bmatrix} - \frac{18}{14} \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix} + \frac{5}{21} \begin{bmatrix} 4\\1\\-2\\0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1\\2\\-1\\15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como anteriormente, faremos $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1\\2\\-1\\15 \end{bmatrix}$.

Desta forma, temos que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} \right\}$$

é base (pelo Lema 5.10 da p.140) ortogonal de W.

(c) Para uma base ortonormal, basta normalizar estes vetores.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{1^2+2^2+3^2+0^2} = \sqrt{14} \\ \|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{4^2+1^2+2^2+0^2} = \sqrt{21} \\ \|\mathbf{u}_4\| &= \sqrt{1^2+2^2+1^2+15^2} = \sqrt{231} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{231}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} \right\}$$

é base ortonormal de W. ■

Observação 5.11 (Software Algébrico) *Veja no Apêndice B.13 da p.247 como utilizar `gramschmidt` no `Maxima`.*

Vamos relacionar a Projeção Ortogonal e o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Primeiro vamos provar uma fórmula explícita para projeção ortogonal quando a base é ortogonal. Releia a Seção 5.4 da p.148 para recordar como calculamos a projeção ortogonal.

Teorema 5.26 (projeção em base ortogonal) *Se $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ é base **ortogonal** de H, então*

$$P_H\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i \,|\mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i.$$

Em particular, se H é uma reta gerada por $\mathbf{u}$,

$$P_H\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}.$$

Prova: Defina $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$. Pela Seção 5.4 da p.148, $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z}$ é solução do sistema $A^TA\mathbf{z} = A^T\mathbf{b}$. Como a base é ortogonal A^TA é uma matriz diagonal. Mais precisamente, $A^TA = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle & & \\ & \ddots & \\ & & \langle \mathbf{u}_p \,|\mathbf{u}_p \rangle \end{bmatrix}$. Além disso $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_p \rangle \end{bmatrix}$. Assim se $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$,

$$A^TA\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle & & \\ & \ddots & \\ & & \langle \mathbf{u}_p \,|\mathbf{u}_p \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1 \rangle \\ \vdots \\ z_p \langle \mathbf{u}_p \,|\mathbf{u}_p \rangle \end{bmatrix} = A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_p \rangle \end{bmatrix}.$$

Logo $z_i = \dfrac{\langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i \,|\mathbf{u}_i \rangle}$ e portanto $P_H\mathbf{b} = A\mathbf{z} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} z_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{b} \,|\mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i \,|\mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$. ■

Exemplo 5.22 *Determine $P_H\mathbf{v}$ se $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ para cada H abaixo (as bases são ortogonais):*

$$\text{(a) } H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\} \quad \text{(b) } H = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}.$$

Solução: *(a) Calculamos esta mesma projeção resolvendo um sistema linear no Exemplo 5.16 da p.150. Compare e veja que é a mesma conta com outra notação. Aplicando o Teorema 5.26 da p.159:*

$$\begin{aligned}
P_H\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2\,|\mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{8}{21}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3\\2/3\\-1/3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Calculamos esta mesma projeção resolvendo um sistema linear no Exemplo 5.15 da p.149. Compare e veja que é a mesma conta com outra notação.

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1\,|\mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/7\\2/7\\3/7\end{bmatrix}.$$

■

Bases ortogonais são convenientes porque é *fácil* se determinar as coordenadas nesta base (veja Definição 4.47 da p.118) de um vetor dado, sem a necessidade de se resolver um sistema linear.

Corolário 5.27 (coeficientes de Fourier) *Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal de V e seja $\mathbf{u} \in V$ dado. Definindo $\alpha_i = \dfrac{\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}_j\rangle}{\langle \mathbf{v}_j\,|\mathbf{v}_j\rangle}$ obtemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$. Desta forma, $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}$. Chamamos os α_j de **coeficientes de Fourier** de $\mathbf{u}$ com relação à base ortogonal β.*

Prova: Se $\mathbf{u} \in V$ é claro que $P_V\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Do Teorema anterior, $P_V\mathbf{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{v}_i$ com $\alpha_i = \dfrac{\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}_j\rangle}{\langle \mathbf{v}_j\,|\mathbf{v}_j\rangle}$. ■

Teorema 5.28 (processo de ortogonalização de Gram-Schmidt) *Dados* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$*, defina de forma indutiva* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ *e, para* $k = 1, \ldots, p-1$*:*

$$H_k = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}; \qquad u_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - P_{H_k}\mathbf{v}_{k+1}.$$

Então $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *é ortogonal e* $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

Prova: Pelo Lema 5.21 da p.151, $H + H^\perp = \mathbb{R}^n$ e $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Logo (porque?) $P_{H_k} + P_{H_k^\perp} = I$. Assim $P_{H_k^\perp}\mathbf{v}_{k+1} = (I - P_{H_k})\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - P_{H_k}\mathbf{v}_{k+1}$. Logo $u_{k+1} = P_{H_k^\perp}\mathbf{v}_{k+1}$. Portanto, por construção o conjunto $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é ortogonal pois cada vetor acrescentado pertence sempre ao complemento ortogonal do espaço gerado pelos vetores anteriores.

Vamos mostrar que $H_p = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ por indução. É claro que $H_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}$ pois $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Suponha, por hipótese de indução(HI), que $H_k = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Assim $\mathbf{u}_{k+1}$ é igual à soma de $\mathbf{v}_{k+1}$ e um elemento de H_k ($P_{H_k}\mathbf{v}_{k+1}$), com $H_k = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ por HI. Assim $\mathbf{u}_{k+1} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$. De forma análoga concluímos que $\mathbf{v}_{k+1} \in H_{k+1}$. Portanto, $H_{k+1} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$.

Calculamos $P_{H_k}\mathbf{v}_{k+1}$ usando o Teorema 5.26 da p.159 pois $H_k = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é ortogonal. Ver na p.157 o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. ■

5.9 Exercícios de Produto Interno

5.9.1 Exercícios de Fixação

Fix 5.1: Considere $\mathbf{u} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ e $\mathbf{v} = (-2,\ 2,\ -2,\ 3)$.
(a) $\|\mathbf{u}\| =$ __; (b) $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v}\rangle =$ __; (c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$ __;
(d) $\mathbf{w} =$ ____ se $\mathbf{w}$ tem mesma direção que $\mathbf{u}$ e é unitário.

Fix 5.2: Determine se é Verdadeiro ou Falso:
(a) todo conjunto ortogonal é ortonormal;
(b) todo vetor não-nulo pode ser normalizado;
(c) um conjunto ortonormal de vetores é sempre LI;
(d) $\langle \mathbf{v} \,|\lambda\mathbf{w}\rangle = \lambda \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w}\rangle$;
(e) $\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\|$.

Fix 5.3: Se W é:
(a) o eixo y em $\mathbb{R}^2$, então $W^\perp$ é a reta __($y = x$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -x$);
(b) a reta $y = x$ em $\mathbb{R}^2$, então $W^\perp$ é a reta __($y = x$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -x$);
(c) o eixo y em $\mathbb{R}^3$, então $W^\perp$ é o ____ (*plano; eixo*) __ (x, y, z, xy, yz, xz);
(d) o plano yz em $\mathbb{R}^3$, então $W^\perp$ é o ____ (*plano; eixo*) __ (x, y, z, xy, yz, xz).

Fix 5.4: Complete as lacunas:
(a) Se $H = \operatorname{Im} A$, então $H^\perp =$____($\mathit{Nuc}\, A$, $\mathit{Nuc}(A^T)$, $\mathit{Im}(A^T)$);
(b) $d(\mathbf{h},\ \mathbf{b})$ ____($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) $d(P_H\mathbf{b},\ \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{h} \in H$;
(c) Se $\mathbf{z} \in W$ e $d(\mathbf{z},\ \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{w},\ \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{w} \in W$, então $\mathbf{z} =$ ____.

Fix 5.5: Se $\mathbf{z}$ é solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então é sempre verdade que:
(A) $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$; (B) $\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\| = 0$; (C) $\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\| > 0$; (D) $P_{\operatorname{Im}(A)}\mathbf{z} = \mathbf{b}$; (E) $P_{\operatorname{Im}(A)}\mathbf{b} = \mathbf{z}$;

[1] 02.out.2012 23h

Fix 5.6: Se $\mathbf{z}$ é solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b})$ ____ $(\leq, \geq)$ ______ $(d(A\mathbf{x}, \mathbf{b}), d(\mathbf{x}, \mathbf{b}))$ para todo $\mathbf{x}$.

Fix 5.7: Complete as lacunas com P_H, R_H, I ou 0, onde P_H é projeção ortogonal em H e R_H reflexão em torno de H.
(a) $P_H R_H =$___; (b) $R_H P_H =$___; (c) $P_H^4 =$___; (d) $P_H^5 =$___;
(e) $R_H^4 =$___; (f) $R_H^5 =$___; (g) $P_H P_{H^\perp} =$___;

Fix 5.8: Sabendo que P é:
(a) projeção ortogonal no eixo y, $P(x, y, z) = (\_\_, \_\_, \_\_)$;
(b) projeção ortogonal no plano xy, $P(x, y, z) = (\_\_, \_\_, \_\_)$;
(c) reflexão em torno do plano xz, $P(x, y, z) = (\_\_, \_\_, \_\_)$.

Fix 5.9: Sabendo que P é projeção ortogonal em H e R a reflexão ortogonal em torno de H podemos afirmar que:
(A) $R = 2P - I$; (B) $R = P - I$; (C) $R = I - P$; (D) $R = 2I - P$.

Fix 5.10: Dado H subespaço vetorial:
(a) $\mathrm{Nuc}(P_H) =$ ___; (b) $\mathrm{Im}(P_H) =$ ___;

Fix 5.11: Complete as lacunas com $I, -I$ ou 0. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se T é:
(a) projeção ortogonal no eixo x seguido de projeção ortogonal no eixo y, então $T =$___;
(b) reflexão em torno do eixo x seguido de reflexão em torno do eixo x, então $T =$___;
(c) reflexão em torno do eixo x seguido de reflexão em torno do eixo y, então $T =$___.

5.9.2 Problemas

Prob 5.1: Determine se os conjuntos abaixo são ortogonais:
(a) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$; (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Prob 5.2: Calcule a distância entre os vetores $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Prob 5.3: Determine uma base de $H^\perp$, onde
(a) H é a reta em $\mathbb{R}^2$ dada por $2x + 3y = 0$;
(b) H é o plano em $\mathbb{R}^3$ dado por $x - y + z = 0$;
(c) $H = \operatorname{span}\{(1,\ 3,\ 1), (3,\ 1,\ 2), (2,\ -2,\ 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
(d) $H = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5$.

Prob 5.4: Sejam $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a projeção ortogonal na reta gerada por $(1,\ 0,\ -1,\ 0)$ e $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a reflexão em torno desta mesma reta. Calcule
(a) $P(x, y, z, w)$; (b) $R(x, y, z, w)$.

Prob 5.5: Determine as matrizes das TLs $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
(a) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $\{(2t, -t) \in \mathbb{R}^2;\ \text{para } t \in \mathbb{R}\}$;
(b) $n = 2$, reflexão em torno da reta $x + 3y = 0$;
(c) $n = 3$, projeção ortogonal sobre o plano $x = z$.

Prob 5.6: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação em relação ao eixo $(1,\ 0,\ 1)$. Sabe-se que $T(0,\ 1,\ 0) = (-1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2})$. Determine o ângulo de rotação.

Dica: pense no plano perpendicular ao eixo de rotação.

Prob 5.7: A força aplicada numa mola e sua distenção estão relacionadas por uma relação linear. Para determinar esta relação para uma certa mola fizemos medidas de distensões e obtemos a seguinte tabela:

força aplicada y (N)	distenção x (cm)
0,5	0,6
1,0	0,9
1,5	1,7
2,0	2,1
2,5	2,4

Monte o sistema (sobredeterminado) que determina a, b da reta $y = ax + b$ e resolva por mínimos quadráticos.

Prob 5.8: Determine a reta que melhor se ajusta aos seguintes pontos: $(0,\ 1.1)$, $(1,\ 2.1)$ e $(2,\ 3.0)$.

Prob 5.9: Sejam $H = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule $P_H\mathbf{v}$ (projeção ortogonal em H) e $R_H\mathbf{v}$ (reflexão em torno de H).

Prob 5.10: Determine a melhor aproximação de $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ por vetores da forma

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Prob 5.11: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o conjunto-solução do problema de mínimos quadrados associado ao sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

(b) Use o item anterior para calcular $P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$. (Dica: você pode usar **qualquer** solução do problema de mínimos quadrados.)

5.9.3 Extras

Ext 5.1: Determine uma base para $H^\perp$ se:

(a) $H = \operatorname{span}\{(1,\ -3,\ 1,\ 2), (2,\ -1,\ 2,\ 0), (-4,\ -3,\ -4,\ 4)\} \subset \mathbb{R}^4$;

(b) H é a interseção dos planos $x - y - z = 0$ e $2x - y + z = 0$;

(c) H é a reta em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $(x(t), y(t), z(t)) = (2t,\ -t,\ 3t)$;

Ext 5.2: Determine as matrizes das TLs $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

(a) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $2x - 4y = 0$;

(b) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $\operatorname{span}\{(0,\ -2)\}$;

(c) $n = 2$, reflexão em torno da reta $2x - 4y = 0$;

(d) $n = 2$, reflexão em torno da reta $y = 3x$.

(e) $n = 2$, projeção ortogonal na reta $y = x$ seguida de rotação de $45°$;

(f) $n = 4$, projeção ortogonal sobre o plano $\left\{\begin{array}{rcl} x - w & = & 0 \\ y = z & = & 0 \end{array}\right.$

(g) $n = 3$, rotação de $45°$ em torno do eixo $(1,\ 1,\ 1)$ (deixe indicado como produto de matrizes, não precisa explicitar o produto).

Ext 5.3: Seja H subespaço vetorial. Mostre que $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Ext 5.4: Em cada item dê um exemplo de uma TL satisfazendo as condições dadas:

(a) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão com $R(0,\ 1) = (0,\ -1)$,

(b) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção ortogonal numa reta com $P(1,\ 1) = (1,\ 1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão tal que $T(2,\ 2,\ 2) = (0,\ 0,\ 1)$.

(d) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal tal que $S(2,\ 1,\ 2) = (2,\ 3/2,\ 3/2)$.

Ext 5.5: Seja R_θ uma rotação do plano de ângulo θ. Sabendo que $R_\theta(\sqrt{3},\ -1) = (2,\ 0)$ e $R_\theta(\sqrt{3},\ 1) = (1,\ \sqrt{3})$, determine θ.

Ext 5.6: Seja R uma reflexão em torno da reta $3x + 5y = 0$ e P uma projeção ortogonal nesta reta. Determine

(a) um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$; (b) um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $R\mathbf{v} = -\mathbf{v}$;

(c) o núcleo de P. (d) o núcleo de R.

Dica: não precisa calcular nem P nem R explicitamente.

Ext 5.7: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V e $\mathbf{w} \in V$ tal que $\langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{w}\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Ext 5.8: (Teorema de Pitágoras generalizado) Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores ortogonais dois a dois, isto é, $\langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Prove que

$$\|\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|^2.$$

Ext 5.9:

(a) Determine a equação $y = ax + b$ da reta que melhor ajusta os pontos $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ e $(3,\ 2)$.

(b) Esboce um gráfico ilustrando o item anterior.

(c) Use sua resposta ao item (a) para determinar a projeção ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ sobre

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

Ext 5.10: [6] Use mínimos quadrados para julgar se a moeda deste experimento é honesta.

[6] Adaptado de [6].

jogadas	8	16	24	32	40
caras	4	9	13	17	20

Ext 5.11: Dado que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ é base **ortogonal** de $\mathbb{R}^3$, expresse $[\mathbf{v}]_\beta$, onde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Dica: Não resolva nenhum sistema linear!

Ext 5.12: Defina em $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ o produto interno $\langle f \,|g \rangle = \int_0^1 f(s)g(s)\,ds$. Calcule:

(a) $\langle x \,|x^2 \rangle$; (b) $\langle x^2 \,|x^3 \rangle$; (c) $\|1 - x\|$.

5.9.4 Desafios

Des 5.1:[7] Uma TL $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita **projeção** (ou **projeção oblíqua**, para enfatizar que pode não ser ortogonal) se $P^2 = P$. Mostre que:

(a) uma projeção ortogonal possui esta propriedade;

(b) existe uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $P(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ para $i \leq k$ e $P(\mathbf{v}_i) = 0$ para $i > k$.

(c) nesta base P é da forma em blocos $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Des 5.2: Seja V espaço vetorial com produto interno e $\{\widehat{\mathbf{u}}_1, \widehat{\mathbf{u}}_2, \widehat{\mathbf{u}}_3, \widehat{\mathbf{u}}_4, \widehat{\mathbf{u}}_5\}$ base ortonormal de V. Seja

$$H = \operatorname{span}\{\widehat{\mathbf{u}}_2 + 2\widehat{\mathbf{u}}_3 + \widehat{\mathbf{u}}_4 + \widehat{\mathbf{u}}_5,\ \ -2\widehat{\mathbf{u}}_2 - 4\widehat{\mathbf{u}}_3 - 2\widehat{\mathbf{u}}_4 - 4\widehat{\mathbf{u}}_5,\ \ \widehat{\mathbf{u}}_2 + 2\widehat{\mathbf{u}}_3 + 2\widehat{\mathbf{u}}_4 + 3\widehat{\mathbf{u}}_5\}.$$

Determine uma base para $H^\perp$.

Des 5.3: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Defina $\langle A \,|B \rangle =$ traço$(A^T B)$ (Veja definição no Ext 7.3 da p.212).

(a) prove que é um produto interno, isto é, satisfaz satisfaz todas propriedades do Lema 5.2 da p.138.

(b) se $A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$, prove que $\|A\|$ (norma de A) induzida pelo produto interno satisfaz: $\|A\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|^2$.

(c) [8] determine o complemento ortogonal do subespaço das matrizes diagonais.

(d) determine o complemento ortogonal do subespaço das matrizes triangulares superior.

(e) se identificamos uma matriz A com um vetor em $\mathbb{R}^{n^2}$, o produto interno usual em $\mathbb{R}^m$ é igual ao produto interno que definimos.

Des 5.4: Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ uma matriz diagonal tal que todos elementos da diagonal são positivos não-nulos. Mostre que $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T D\mathbf{u}$ é um outro **produto interno** para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, isto é, satisfaz satisfaz todas propriedades do Lema 5.2 da p.138.

[7] Adaptado de [6].

[8] Veja [7] p.289, sec. 8.2 #10.

Des 5.5: Suponha que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz todas propriedades do Lema 5.2 da p.138: $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (simetria), $g(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha g(\mathbf{u}, \mathbf{w})+g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (linearidade) e $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ (positividade). Prove que:

(a) $g(\mathbf{0}, \mathbf{z}) = 0$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

(b) $g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

(c) existe matriz A tal que $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$.

Dica: $A = (a_{ij})$ é definida por $a_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}e_j)$.

(d) $A = A^T$ (a matriz A é simétrica; pode-se provar também que é positivo definida – Definição 7.11 da p.208).

Observação: Este exemplo generaliza o anterior e mostra que **todo** produto interno em $\mathbb{R}^n$ pode ser representado por uma matriz simétrica positivo definida.

Des 5.6: Mostre que em $\mathbb{R}^2$ toda matriz de:

(a) projeção ortogonal é igual a $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$; (b) reflexão é igual a $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$.

Des 5.7: Mostre que se H, W são subespaços do $\mathbb{R}^n$, então:

(a) $H^\perp \cap W^\perp \subset (H \cap W)^\perp$; (b) $(H^\perp)^\perp = H$.

Des 5.8: [9] Mostre dada matriz invertível A existem S auto-adjunta ($S^T = S$) e Q ortogonal ($Q^T = Q^{-1}$) tais que $A = SQ$. Esta é chamada de **decomposição polar** de A, em analogia com complexos: S é o módulo (esticamento) e Q a parte angular (rotação). Prove que ela é única. Veja `Wikipedia polar decomposition`.

Des 5.9: Interprete o algoritmo de Gram-Schmidt como uma decomposição $A = QR$, com Q ortogonal e R triangular superior. Veja `Wikipedia QR decomposition`.

Des 5.10: Prove que a matriz de rotação anti-horária por um ângulo θ em torno do eixo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ é:

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\operatorname{sen}\theta & ac(1-\cos\theta)+b\operatorname{sen}\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\operatorname{sen}\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\operatorname{sen}\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\operatorname{sen}\theta & bc(1-\cos\theta)+a\operatorname{sen}\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dica: Mude base levando o eixo z em (a, b, c) e utilize matriz de rotação no plano xy.

Des 5.11: Suponha que R é uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo fixo.

(a) prove que existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}RP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;

(b) Prove que[10] se $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor não-nulo que não pertença ao plano de rotação, então $\mathbf{v} = R\mathbf{w} + R^T\mathbf{w} + (I - \text{traço}(R))\mathbf{w}$ determina o eixo de rotação de R.

(c) Conclua que se A é matriz de rotação, o ângulo θ de rotação satisfaz $\cos\theta = (\text{traço}(A) - 1)/2$.

Des 5.12: Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ conjunto ortonormal e $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Se $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ e R_θ a rotação no plano W por um ângulo θ, $R_\theta\mathbf{w} = (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta)\mathbf{v}_1 + (a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)\mathbf{v}_2$.

[9] Veja [12] p.272 #6.

[10] Veja [1].

Capítulo 6

Determinante

Vamos responder as seguintes perguntas sobre o determinante:

(a) O que é?

(b) Quais são suas propriedades?

(c) Como se calcula (Qual é a fórmula ou algoritmo para o cálculo)?

(d) Qual a utilidade?

Note que saber **como** se calcula não é o mesmo que saber **o que é**.

O que é o determinante?

O determinante é uma função que associa a cada matriz real[2] quadrada A um número denotado por $\det(A)$. Desta forma, $\det$: {matrizes quadradas} $\to \mathbb{R}$. O determinante é uma generalização de área e volume.

Nosso plano é deduzir propriedades (linearidade por exemplo) do determinante por ser área (e volume) no $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^n$ **inverter o procedimento**, definindo o determinante através destas propriedades. Depois disso apresentamos um algoritmo para o cálculo do determinante.

Usos do determinante.

(a) caracterizar matrizes não-invertíveis (isto é, as matrizes singulares) – fundamental para o Capítulo de Autovalores e Autovetores;

(b) determinar os chamados autovalores de uma matriz, tema do próximo capítulo;

(c) relacionar áreas/volumes de regiões do plano/espaço após aplicação de uma função – fundamental em mudança de variáveis de integral múltipla;

(d) obter fórmula de solução de sistema linear (regra de Cramer);

(e) obter fórmula da matriz inversa (veja `Wikipedia: Matriz inversa`).

6.1 Motivação Geométrica

O determinante de uma matriz quadrada é uma generalização de área e volume. Em $\mathbb{R}^2$, dada matriz $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, associe o paralelogramo P com vértices na extremidade dos vetores $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}$, conforme indicado na Figura 6.1.

---

[1]Versão 04.out.2012 17h

[2]De forma mais geral a cada matriz quadrada com entradas em $\mathbb{K}$ definimos $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$, etc.

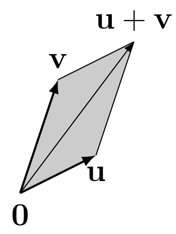


Figura 6.1: Paralelogramo Gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

O determinante de A será definido como a área[1] de P. Vamos deduzir uma fórmula da área do paralelogramo P. Para isto sejam $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (c, d)$. A área de P é igual a área do retângulo $(a+c)(b+d)$ menos a soma das áreas T_1, T_2, T_3, T_4 dos triângulos e trapézios indicados na Figura 6.2. Calculando as áreas:

$$T_1 = ab/2, \quad T_2 = c(2b+d)/2, \quad T_3 = b(2c+a)/2, \quad T_4 = cd/2.$$

Efetuando, $\text{área}(P) = (a+c)(b+d) - [ab/2 + c(b+d/2) + b(c+a/2) + cd/2] = ad - bc$.

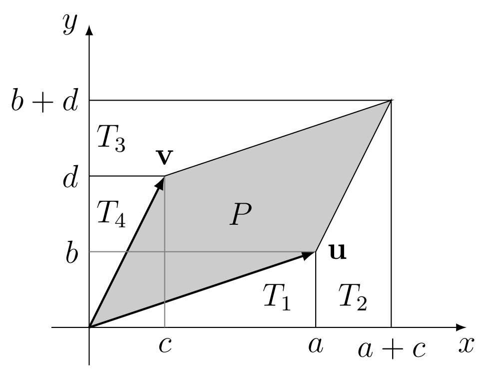


Figura 6.2: Dedução da Área do Paralelogramo Gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 6.1 (determinante de matriz 2×2) *Considere a matriz* $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. *Definimos o determinante* ($\det$) *da matriz por:*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc.$$

[1] Na verdade **área com sinal** de P: Leia Observação 6.1 e a Seção 6.7 da p.184. Vamos supor que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão na configuração da Figura 6.2 pois senão (se $\mathbf{u}$ estiver no 2o quadrante por exemplo) poderíamos obter $bc - ad$ ao invés de $ad - bc$.

Observação 6.1 (área com sinal) *Note que* $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 = -\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -(-1)$*: trocando duas colunas o sinal do determinante se inverte. De fato a área é o* ***módulo*** *do determinante. Assim é mais preciso dizer que o determinante generaliza* ***área com sinal****.*

Área com sinal aparece no cálculo, quando a integral de uma função é associada a área (com sinal) entre a curva e o eixo x: área acima do eixo é considerada positiva e abaixo é considerada negativa. Se a integral fosse simplesmente a área, $\int_0^1 x^2\,dx$ e $\int_0^1 -x^2\,dx$ seriam ambas estritamente positivas e portanto $\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 -x^2\,dx \neq \int_0^1 (x^2 - x^2)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$. Com isto a integral não seria linear com relação a soma (integral da soma de duas funções é igual a soma das integrais). Por razões análogas o determinante é área com sinal (para ser linear).

Em $\mathbb{R}^3$ (a fórmula vai aparecer em breve!), definimos o determinante da seguinte forma.

Definição 6.2 (determinante de matriz 3×3) *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Associamos a esta matriz o paralelepípedo P gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, conforme indicado na Figura 6.3. Definimos o determinante de A como o volume (com sinal) do paralelepípedo P.*

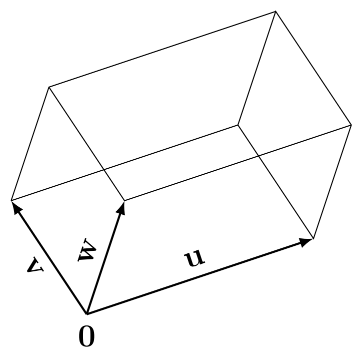


Figura 6.3: Paralelepípedo Gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

Antes de definir o determinante para matrizes $n \times n$ vamos verificar algumas propriedades da área no $\mathbb{R}^2$. Convidamos o leitor a verificar propriedades similares do volume em $\mathbb{R}^3$. As figuras que seguem **não** representam todos os casos possíveis e são de caráter motivacional. Retomamos o rigor matemático a partir do Teorema 6.3 da p.171.

Propriedade 1a: Multiplicação por escalar

(1a) $\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ (se multiplicarmos uma coluna por k o determinante será multiplicado por k).

Conforme sugerido pela Figura 6.4, se multiplicamos o vetor $\mathbf{u}$ por 2 duplicamos a área, por 3 triplicamos a área e assim por diante. O mesmo ocorre com frações, como por exemplo multiplicando $\mathbf{u}$ por $3,5$. Em $\mathbb{R}^3$, se multiplicamos uma aresta por k o volume do paralelepípedo é multiplicado por k.

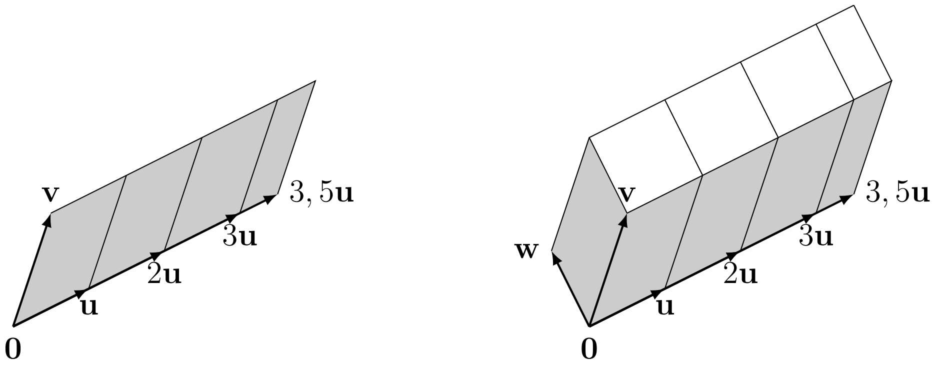


Figura 6.4: Produto por Escalar e Mudança de Área e Volume

Propriedade 1b: Soma de vetores

(1b) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ (determinante da soma de dois vetores é igual a soma dos determinantes).

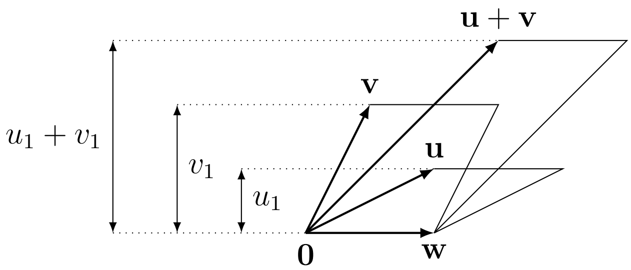


Figura 6.5: Soma de Vetores e Mudança de Área

Vamos motivar[1] este resultado através da Figura 6.5. Queremos provar que a soma das áreas do paralelogramo gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ com a área do paralelogramo gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é igual a área do paralelogramo gerado por $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Observe que os três paralelogramos possuem a aresta da base $\mathbf{w}$ em comum. Como a área é base vezes altura, basta comparar as alturas. As alturas são as projeções ortogonais de $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ e $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ na direção perpendicular a $\mathbf{w}$, ou seja u_1 e v_1. Como $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$, a projeção ortogonal de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é u_1+v_1. Logo a altura do paralelogramo maior é igual a soma das alturas dos menores e concluímos o resultado.

Em $\mathbb{R}^3$ podemos fazer algo análogo com paralelepípedos. Deixamos os detalhes para o leitor (ou para o professor).

Propriedade 1 (resumo): Determinante é Linear em cada coluna.

Juntando as Propriedades 1(a) e 1(b) e observando que o raciocínio vale para segunda coluna da matriz também. Concluímos que o determinante é linear na primeira ou na segunda coluna. Assim dados $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$ e $k\in\mathbb{R}$:

$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ e

[1] Note que estamos colocando os vetores em uma posição particular, com $\mathbf{w}$ paralelo ao eixo x por exemplo. Mas a Figura 6.5 é somente uma ilustração da relação entre a Propriedade 1b e área.

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & k\mathbf{v}+\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

De forma análoga em $\mathbb{R}^3$ o determinante é linear na primeira, segunda ou terceira coluna. Assim dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$:

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ k\mathbf{u}+\mathbf{z} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{z} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & k\mathbf{v}+\mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & k\mathbf{w}+\mathbf{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

Propriedade 2: Determinante é zero se vetores são LDs.

Se os vetores são linearmente dependentes (LDs) o paralelogramo será degenerado num segmento de reta ou ponto, que possui área zero. Em $\mathbb{R}^3$, se os 3 vetores coluna da matriz forem LDs o paralelepípedo vai se degenerar num paralelogramo ou segmento de reta ou ponto, que possui volume zero. Portanto, se os vetores são LDs o determinante é zero.

Propriedade 3: Determinante da matriz identidade é 1.

A área e volume devem ter uma unidade de medida. Como um quadrado de lado 1 possui área 1, $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det I = 1$ Do mesmo modo o um cubo de lado 1 possui volume 1, $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det I = 1.$

6.2 Definição e Propriedades Básicas

A definição de determinante é baseada num fato surpreendente expresso no próximo teorema: existe uma **única** função com as propriedades da função área e volume apresentadas na seção anterior.

Teorema 6.3 (caracterização algébrica do determinante) *Considere o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}$ das matrizes reais*[1] *quadradas $n \times n$. Existe uma **única função** $\det : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

PROPRIEDADE *1: é linear em cada coluna;*

PROPRIEDADE *2: é zero se as colunas são LDs;*[2]

PROPRIEDADE *3:* $\det(I) = 1$.

Prova: Consulte [7]. ∎

[1] De forma geral (veja Definição 2.2 da p.30) $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$, etc.

[2] São equivalentes assumir que determinante: (a) é zero se colunas são LDs + Prop 1; ou (b) é zero se duas colunas são iguais + Prop 1; ou (c) troca de sinal se trocarmos duas colunas + Prop 1.

De fato pode-se escolher Prop 1 + (b) ou Prop 1 + (c) ao invés de nossa escolha por Prop 1 + (a).

Definição 6.4 (determinante) *O **determinante** de uma matriz quadrada A é a função dada pelo teorema acima. O **determinante** de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definido como o determinante da matriz A (dada pelo Lema 4.5 da p.94) que representa T.*

Observação 6.2 *Embora completa, a definição acima não apresenta (diretamente) uma fórmula para calcular o determinante. Deixo para reflexão do leitor o que disse Klaus Jänich (veja [8]):*

> *"Se você ainda acha que a informação mais importante acerca de um objeto matemático é uma* **fórmula** *para* **calcular o seu valor***, certamente você compartilha o pensamento da maioria das pessoas medianamente educadas, mas com conhecimentos apenas superficiais de matemática."*

Observação 6.3 *A Propriedade 1 (linearidade)* ***não significa*** *que* $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. *Por exemplo,* $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \neq \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1+1 = 2.$

Podemos chegar ao resultado correto usando linearidade da seguinte forma:
$\det(2I) = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ 2\mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$ (*linearidade na primeira coluna*) $2\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$ (*linearidade na segunda coluna*) $2\cdot 2\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 4.$

Exemplo 6.1 *Calcule:*

(a) $\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & 3\mathbf{u}-5\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$; *(b)* $\det(2I)$ *se I é a matriz identidade $n \times n$.*

Solução: *(a) Como $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$ é múltiplo dos outros dois, as colunas são LDs. Logo,* $\det = 0$.

(b) Por linearidade retiramos um 2 de cada vez: $\det(2I) = \det[2\mathbf{e}_1 2\mathbf{e}_2 \cdots 2\mathbf{e}_n] =$
$= 2\det[\mathbf{e}_1 2\mathbf{e}_2 \cdots 2\mathbf{e}_n] = 2^2\det[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \cdots 2\mathbf{e}_n] = 2^n\det[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\cdots\mathbf{e}_n] = 2^n \det I = 2^n.$ ■

Lema 6.5 Propriedade *4: Se trocarmos duas colunas o determinante troca de sinal.*

Prova: Vamos provar no caso 2×2. O caso geral é provado de forma similar com mais colunas. Pela linearidade (Propriedade 1),

$$\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Pela Propriedade 2 (determinante é zero se colunas são LDs)

$$\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}+\mathbf{v} & \mathbf{u}+\mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0.$$

Logo $\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = 0$, isto é, $\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. ■

6.3 Calculando Determinante

6.3.1 Fórmula do Determinante em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: Regra de Sarrus

Vamos deduzir as fórmulas (bem conhecidas) do determinante de uma matriz 2×2 e 3×3 utilizando as propriedades do Teorema 6.3 da p.171. O objetivo é mostrar como poderíamos fazer para deduzir a fórmula para uma matriz $n \times n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Fórmula do determinante de matriz 2×2

Considere $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, pela linearidade (1a coluna), $\det(A) = a\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{v}\ \right] + b\det\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{v}\ \right]$. Como $\mathbf{v} = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$, pela linearidade (2a coluna),

$$\det(A) = a\left(c\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1\ \right] + d\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2\ \right]\right) + b\left(c\det\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1\ \right] + d\det\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_2\ \right]\right).$$

Como o determinante se anula se as colunas são iguais (LDs) obtemos

$$\det(A) = ad\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2\ \right] + bc\det\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1\ \right].$$

Trocando coluna (Lema 6.5) e pela Propriedade 3, $\det(A) = ad \cdot 1 + bc\dot{(}-1) = ad - bc$.

Fórmula do determinante de matriz 3×3

Antes de deduzir a fórmula, é importante o leitor estudar o exemplo abaixo.

Exemplo 6.2 *Determine o valor dos determinantes de cada matriz:*

(a) $\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_3\ \right]$; *(b)* $\left[\ \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1\ \right]$; *(c)* $\left[\ \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3\ \right]$; *(d)* $\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_1\ \right]$.

Solução: *(a) É uma troca (1a com 2a coluna) para obter a matriz I:* $\det = -1$.

(b) É uma troca (1a com 3a coluna) para obter a matriz I: $\det = -1$.

(c) Como possui duas colunas iguais, $\det = 0$

(d) São 2 trocas (1a com 3a, 2a com 3a) para obter I: $\det = 1$. ■

Considere $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$, pela linearidade (1a coluna), $\det(A) = a\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\ \right] + b\det\left[\ \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\ \right] + c\det\left[\ \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\ \right]$. Vamos prosseguir com o primeiro dos três termos. Como $\mathbf{v} = d\mathbf{e}_1 + e\mathbf{e}_2 + f\mathbf{e}_3$, pela linearidade (2a coluna),

$$a\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\ \right] = a\left(d\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{w}\ \right] + e\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{w}\ \right] + f\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{w}\ \right]\right).$$

O primeiro termo vale zero pois têm duas colunas iguais. Assim,

$$a\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\ \right] = a\left(e\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{w}\ \right] + f\det\left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{w}\ \right]\right).$$

Vamos prosseguir com o primeiro dos dois termos. Como $\mathbf{w} = g\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3$, pela linearidade (3a coluna), obtemos que

$$e \det \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{w}\ \right] = e \left(g \det \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_1\ \right] + h \det \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_2\ \right] + i \det \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3\ \right] . \right) .$$

O único termo não-nulo é o último. Assim, $e \det \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{w}\ \right] = ei$. Retornando ao início concluímos que um termo do $\det A$ é aei. Todos os termos vão envolver $\det \left[\ \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \mid \mathbf{e}_k\ \right]$, que valerão 1 ou -1 ou 0 dependendo da permutação dos vetores. Convidamos o leitor a expandir até o final e obter que $\det(A) = aei - ahf + dhc - dbi + gbf - gec$.

As fórmulas do $\det$ para matriz 2×2 e 3×3 podem ser representados pela chamada **regra de Sarrus** apresentada na Figura 6.6.

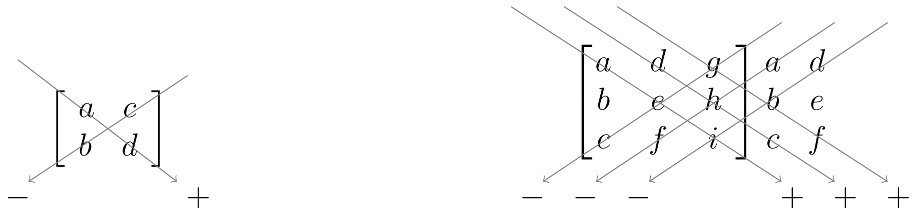


Figura 6.6: Regra de Sarrus: Determinante de Matriz 2×2 e 3×3.

Observação 6.4 (regra de Sarrus) *A regra de Sarrus **não** generaliza para dimensão maior que 3: Não existe procedimento semelhante a este para matrizes 4×4.*

A **Fórmula de Leibniz** (veja `Wikipedia: Determinante`) do determinante de uma matriz $n \times n$ pode ser deduzida expandindo por colunas como fizemos para matriz 3×3. Obtemos uma soma de termos, com sinais $+$ ou $-$, a grande maioria dos quais são zero (correspondendo às colunas repetidas) e sobram apenas os que são o produto de n entradas da matriz em que não há duas entradas da mesma linha nem da mesma coluna (pense em Sodoku!).

6.3.2 Algoritmo para Cálculo do Determinante

Apresentamos um algoritmo para o cálculo do determinante baseado nas **operações elementares** (Definição 2.7 da p.38). Primeiro transferimos as propriedades do determinante por linha para coluna através da propriedade do determinante da matriz transposta (Definição 4.13 da p.104). Depois verificamos o efeito no determinante da aplicação das operações elementares. Utilizando-as colocamos a matriz na forma escalonada triangular. Finalizamos provando que se a matriz é triangular (superior ou inferior) é fácil calcular seu determinante.

Teorema 6.6 (determinante da transposta)
PROPRIEDADE 5: *Se A é uma matriz quadrada, então $\det(A^T) = \det(A)$.*

Prova: É uma prova técnica. Veja [7]. ∎

A Propriedade 5 permite transferir **todas** as propriedades do determinante com relação às colunas para as linhas da matriz.

Corolário 6.7 *Todas as propriedades do determinante para colunas são verdadeiras para as linhas. Portanto:*
PROPRIEDADE 6: *O determinante:*
(a) é linear em cada linha;
(b) é zero se as linha são LDs;
(c) troca de sinal quando se trocam duas linhas.

Prova: Segue facilmente do teorema anterior e propriedades correspondentes (por colunas) do determinante. ∎

Corolário 6.8 (operações elementares e determinante) *O efeito de cada operação elementar abaixo sobre o determinante de uma matriz é:*

(a) trocar linhas: determinante troca de sinal;

(b) multiplicar linha por escalar não-nulo: determinante é multiplicado por escalar;

(c) substituir linha por sua soma com múltiplo de outra: determinante não se altera.

Prova: Os itens (a) e (b) seguem diretamente do último Corolário. Quanto ao item (c), pelo Teorema 6.6, basta mostrar propriedade correspondente por coluna. Considere $A = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Substituindo uma coluna pela soma com múltiplo de outra obtemos $B = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Portanto, por linearidade,

$$\det B = \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}.$$

Como duas colunas são iguais no último determinante, ele é nulo (independente do valor de k) e portanto $\det B = \det \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{v} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} = \det A$. ∎

Lema 6.9 (determinante de matriz triangular)

Propriedade 7: *Se uma matriz é triangular (superior ou inferior), então seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.*

Prova: Vamos supor que a matriz é triangular superior (argumento análogo vale para triangular inferior). Considere dois casos:

(a) tem pelo menos um zero na diagonal. Suponha que $a_{kk} = 0$. Considere M a matriz formada pelas k primeiras colunas desta matriz. Como M está escalonada com no máximo $k-1$ linhas não-nulas, a dimensão do espaço-linha de M é no máximo $k-1$. Pelo Lema 4.15 da p.104, a dimensão do espaço-coluna de M é igual a dimensão do espaço-linha, e portanto é no máximo $k-1$. Como são k vetores coluna de M gerando espaço de dimensão máxima $k-1$, as colunas de M, e por consequência as primeiras k colunas da matriz são LDs e portanto o determinante é zero.

(b) todos elementos da diagonal são não-nulos. Coloque-os em evidência para obter 1 na diagonal. O valor do determinante será o produto destes elementos vezes o determinante da matriz com 1 na diagonal. Substitua linha por múltiplo de outra linha até transformá-la em diagonal. Pelo Corolário 6.8 isto não altera o seu determinante. Obtemos a matriz identidade, cujo determinante é 1. ∎

Exemplo 6.3 *Calcule* $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: *Como a matriz é triangular,* $\det = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$. ∎

Algoritmo 6.10 (cálculo eficiente do determinante)

1. *Faça eliminação de Gauss, reduzindo matriz à forma diagonal superior;*
2. *Leve em conta a cada operação elementar o efeito sobre o determinante:*
   (a) *trocar linhas* $\Longrightarrow$ *determinante troca de sinal;*
   (b) *multiplicar linha por constante* $\Longrightarrow$ *determinante é multiplicado pela constante;*
   (c) *substituir linha por sua soma com múltiplo de outra:* $\Longrightarrow$ *determinante não se altera.*
3. *Calcule determinante da matriz resultante pelo produto dos elementos da diagonal.*

Exemplo 6.4 *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Solução: *Troque* l_1 *com* l_3: $\det A = -\det \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Coloque 3 *em evidência em* l_1: $\det A = -3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Faça $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$: $\det A = -3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Faça $l_3 \leftarrow l_3 + 4l_2/3$: $\det A = -3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 + 8/3 = 32/3 \end{bmatrix}$.

Agora a matriz é triangular: calcule produto dos elementos da diagonal: $\det A = -3(1)(-3)(32/3) = 96$. ∎

Observação 6.5 (Software Algébrico) *Pode-se calcular o determinante com o comando do Maxima* `determinant`. *Entramos a matriz com* `M: matrix( [0,4,8], [2,1,8], [3,6,9]);` *e calculamos:* `determinant(M);`.

Se você folhear livros de Álgebra Linear encontrará pelo menos

Três modos de calcular o determinante:

(a) fórmula de Laplace (também conhecido como expansão por cofatores);
(b) fórmula de Leibniz;
(c) Algoritmo 6.10 da p.176.

Embora as formas (a) e (b) sejam importantes do ponto de vista teórico (por exemplo para provar que $\det A = \det A^T$) são extremamente ineficientes na prática (veja próxima observação): optamos por omiti-las (mas veja na `Wikipedia`). A forma do item (c) é a mais eficiente mas não é uma fórmula, e sim um algoritmo.

Observação 6.6 (comparando métodos de cálculo do determinante) *Dada matriz $n \times n$, a fórmula de Laplace ou Leibniz necessita de cerca de $n!$ operações, enquanto o Algoritmo 6.10 necessita de cerca de $2n^3/3$ operações.*

n	*Laplace*	*Algoritmo 6.10*
2	3	4
3	14	15
4	63	37
6	2 *mil*	130
20	6×10^{18}	5 *mil*

Para $n \geq 4$ o Algoritmo 6.10 já é mais eficiente. Um computador que faça 1 milhão de operações por segundo levaria 32 mil anos para calcular o determinante de uma matriz 20×20 pelo método de Laplace e frações de segundo pelo Algoritmo 6.10 .

6.4 Mais Propriedades

Teorema 6.11 (caracterização de matrizes invertíveis)
PROPRIEDADE 8: *Seja A uma matriz quadrada. São* ***equivalentes****:*
(a) A não é invertível; *(b) $\mathrm{Nuc}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$;*
(c) colunas (ou linhas) de A são LDs; *(d) $\det(A) = 0$.*

Prova: (a) e (b) são equivalentes pelo Lema 4.35 da p.113.

Pelo Lema 4.15 da p.104 (posto linha = posto coluna), se a matriz é $n \times n$, a dimensão do espaço-coluna é $< n$ (colunas LDs) se, e somente se, a dimensão do espaço-linha é $< n$ (linhas LDs). Portanto a matriz possuir colunas LDs é equivalente a possuir linhas LDs

(b) implica em (c): Se $\mathrm{Nuc}(A) \neq \mathbf{0}$, então existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Os componentes do vetor $\mathbf{v}$, pela definição do produto matriz-vetor, vão determinar uma combinação linear não-trivial das colunas de A cujo resultado é o vetor zero. Logo as colunas de A formam um conjunto LD.

(c) implica em (d) pela definição de determinante.

(d) implica em (b): Suponha que $\det A = 0$. Aplique o algoritmo de cálculo do determinante, reduzindo A à forma triangular U. Agora $\det A = 0$ se, e somente se, $\det U = 0$. Logo um dos elementos da diagonal de U é zero. Seguindo o argumento da prova do Lema 6.9 da p.175 (determinante da matriz triangular), as linhas de U são LDs. Logo as linhas de A são LDs (U é a matriz A escalonada) Pelo Lema 4.15 da p.104 (posto linha = posto coluna), as colunas de A são LDs e portanto o sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ possui uma solução $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. ■

O tema central do próximo capítulo (autovalores e autovetores) será determinar todos λ tais que o sistema $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possua solução não-trivial. Estudamos isto introduzindo a matriz identidade I e buscando solução não-trivial de $A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$ ou $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pelo Teorema 6.11 devemos determinar λ tais que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Exemplo 6.5 *Determine todos λ tais que o sistema $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possua solução não-trivial para a matriz:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; *(b)* $A = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) Calculando* $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$. *Para anular determinante tomamos* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = -1$.

(b) Precisamos resolver $\det(A-\lambda I) = 0$. *Como a matriz (também) diagonal* $A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & & & \\ & b-\lambda & & \\ & & c-\lambda & \\ & & & d-\lambda \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(d-\lambda)$. *Para anular determinante tomamos* λ *igual a* a *ou* b *ou* c *ou* d. *Um* $\boxed{\textbf{erro comum}}$ *cometido pelos alunos é expandir a expressão* $(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(d-\lambda) = 0$, *ao invés de obter raízes diretamente, e tentar calcular raízes de* $\lambda^4 - \lambda^3(a+b+c+d) + \lambda^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - \lambda(abc+abd+bcd+acd) + abcd = 0$. ∎

A propriedade do produto caracteriza o determinante da matriz inversa e proporciona a interpretação do determinante como mudança de área/volume.

Teorema 6.12 (determinante do produto)

Propriedade 9: *Sejam* A, B *matrizes quadradas da mesma ordem. Então* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Prova: [1] Se $\det(A) \neq 0$, defina $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ por $f(B) = \det(AB)/\det(A)$. Vamos provar que f possui as propriedades da definição (Teorema 6.3 da p.171) do determinante:

Propriedade 1 (linearidade em cada coluna): se $B = \begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$, então

$$\det(AB) = \det\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A(\mathbf{u}+k\mathbf{v}) & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$$

(por linearidade de A) $= \det\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{u}+kA\mathbf{v} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$ (por linearidade do determinante) $= \det\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{u} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix} + k\det\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & A\mathbf{v} & \cdots & A\mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}$. Dividindo por $\det(A)$ obtemos que

$$f(B) = f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u}+k\mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right) =$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right) + kf\left(\begin{bmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{w} & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{bmatrix}\right).$$

Portanto f é linear por colunas.

Propriedade 2: se colunas de B são LDs, então colunas de AB serão LDs também pois produto matriz-matriz equivale a aplicar A em cada coluna de B (ver Lema 4.24 da p.109). Logo $\det(AB) = 0$ pela Propriedade 2 do determinante. Portanto $f(B) = 0$.

[1] Pode ser omitida numa 1a leitura.

Propriedade 3: $f(I) = \det(AI)/\det(A) = \det(A)/\det(A) = 1$.

Pelo Teorema 6.3 da p.171 (unicidade do determinante), $f(B) = \det(B)$. Dai segue o resultado.

Se $\det A = 0$ pelo Teorema 6.11 da p.177 as colunas de A são LDs. Logo o posto coluna (dimensão do espaço gerado pelas colunas) de A é menor que n. Pela interpretação do produto matriz-matriz (ver Lema 4.25 da p.109 item (a)) as colunas de AB são combinações lineares das colunas de A. Logo o espaço gerado pelas colunas de AB está contido no espaço gerado pelas colunas de A. Portanto posto coluna de AB é menor que n. Portanto colunas de AB são LDs, o que implica pela propriedade 2 que $\det(AB) = 0$. Logo, neste caso também $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B)$. ■

Exemplo 6.6 *Sabendo que* $\det(A) = 5$ *determine* $\det(A^{-1})$.
Solução: *Como* $AA^{-1} = I$, *pela propriedade do determinante do produto*

$$\det(I) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Logo $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/5$. ■

A aplicação sucessiva do próximo lema permite reduzir a ordem do determinante a cada aplicação. Para entender esta parte reveja operações em matrizes divididas em blocos na Seção 4.6 da p.117.

Lema 6.13 (determinante de matriz bloco-triangular) *Suponha que* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ *ou* $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, *com* A *e* D *matrizes quadradas. Então* $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

Prova: Vamos provar inicialmente que se $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, então $\det M = \det D$. De fato, aplicando o Algoritmo 6.10 da p.176, a sequência de operações que escalona M é igual à sequência que escalona D pois parte de M já está escalonada. Logo $\det M = \det D$. De forma análoga provamos que $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det A$.

Vamos supor que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ pois o caso $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & D \end{bmatrix}$ é análogo.

Se $\det A = 0$, então (Teorema 6.11 da p.177) colunas de A são LDs. Como M possui somente zeros abaixo de A, colunas de M são LDs. Logo $\det M = 0$. Se $\det D = 0$, então, de forma análoga, $\det M = 0$.

Supondo que $\det A$ e $\det D$ são não-nulos, verifique que:

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Utilizando Teorema 6.12 (determinante do produto), basta calcular o determinante de cada uma destas três matrizes. Pelos resultados acima, o primeiro determinante é $\det A$ e o último é $\det D$. O do meio, por ser matriz triangular superior com 1's na diagonal, vale 1 pelo Lema 6.9 da p.175. Concluímos o resultado. ■

Corolário 6.14 (determinante de matriz bloco-triangular) *Suponha que M seja uma matriz triangular superior por blocos, ou seja,* $M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{nn} \end{bmatrix}$, *com A_{jj} matrizes quadradas. Então $\det(M) = \det(A_{11}) \cdots \det(A_{nn})$, o produto do determinante das matrizes na diagonal de M (resultado análogo se M for triangular inferior).*

Prova: Deixamos para o leitor provar por indução usando o Lema 6.13. ■

Observação 6.7 *Considere $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, com A, B, C e D matrizes quadradas. De forma geral, $\det(M) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$. Veja Exercício 6.17 da p.191.*

Exemplo 6.7 *Calcule os valores de λ tais que o determinante da matriz abaixo se anula:*

$$M = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+\lambda \end{bmatrix}.$$

Solução: *Observe que ela é bloco-triangular (mas não é triangular!). Definindo* $M_1 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $M_3 = 3 + \lambda$, *temos que* $M = \begin{bmatrix} M_1 & * & * \\ 0 & M_2 & * \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$\det(M) = \det(M_1)\det(M_2)\det(M_3) = -(\lambda-1)^2(\lambda^2-1)(3+\lambda).$$

As raízes são obtidas diretamente desta fatoração: $1, -1, -3$. ■

Observação 6.8 *Se no exemplo anterior tivéssemos multiplicado os termos em $-(\lambda - 1)^2(\lambda^2-1)(3+\lambda) = 0$ obteríamos que $\det M = -\lambda^5 - \lambda^4 + 6\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$. Como você encontraria as raízes deste polinômio?*
Este $\boxed{\textbf{erro comum}}$ *— multiplicar todos os termos ao invés de utilizar a estrutura fatorada — foi visto também no Exemplo 6.5 da p.177.*
Note que a fatoração decorre (e deve ser mantida) naturalmente do determinante de matriz triangular ou bloco-triangular.

Cálculo Eficiente do determinante

- Se a matriz for triangular aplique o Lema 6.9.
- Explore estrutura de blocos (linhas ou colunas com maior número de zeros) para obter submatriz triangular.
- Para matriz 2×2 e 3×3 em geral (não triangular) aplique a regra de Sarrus (Figura 6.6 da p.174).
- Para uma matriz $n \times n$ com $n > 3$ em geral (não triangular) aplique o Algoritmo 6.10 da p.176.

Exemplo 6.8 *Calcule* $\det A$ *trocando linhas ou colunas para ficar bloco-triangular:*

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; *(b)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; *(c)* $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: *(a) Embora a matriz* A *não possua estrutura especial, trocando 2a com 3a coluna obtemos a matriz bloco-triangular inferior:* $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Assim $\det A = -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot 2 = -(-5) \cdot 2 = 10.$

(b) Embora a matriz A *não possua estrutura especial, trocando 1a com 3a coluna obtemos a matriz bloco-triangular superior:* $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. *Assim* $\det A = -\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = -(-1) \cdot 1 = 1$

(c) Vamos tentar sistematizar. As melhores escolhas são a 4a coluna ou a 4a linha pois ambas possuem o maior número de zeros. Explorando o grande número de zeros na 4a coluna, vamos trocá-la pela 1a coluna: $\left[\begin{array}{c|cccc} -1 & 11 & -7 & 4 & -3 \\ \hline 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right]$. *Assim* $\det A = -(-1) \cdot \det B$ *onde* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. *O maior número de zeros é na 3a linha. Trocando-a com a 1a linha obtemos* $\left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right]$. *Assim* $\det B = -(3) \cdot \det C$ *onde* $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Explorando os zeros da 1a linha, trocando a 1a com a 2a coluna obtemos $\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{array}\right]$.

Assim $\det C = -(2) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -(2)(-13) = 26.$ *Logo* $\det B = -3(26) = -78$ *e* $\det A = -78.$ *Verificando com Maxima:*

```
M: matrix([4,11,-7,-1,-3],[-2,2,1,0,3],[2,7,0,0,0],[0,3,0,0,0],[3,-1,6,0,5]);
determinant(M);
```

■

6.5 Determinante e Mudança de Área

Lema 6.15 (mudança de área de um quadrado) *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma transformação linear e* $Q \subset \mathbb{R}^2$ *um quadrado com lados paralelos aos eixos* x *e* y*:*

(a) $T(Q)$ *é um paralelogramo;* *(b)* $\text{área}(T(Q)) = \text{área}(Q)|\det T|$.

Prova: Suponha inicialmente que o quadrado Q seja unitário com vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Observe a Figura 6.7. Qualquer ponto do interior do quadrado é combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e

$\mathbf{e}_2$ com coeficientes entre 0 e 1. Pela linearidade de T, a imagem será exatamente das combinações lineares de $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$ com coeficientes entre 0 e 1, ou seja, um paralelogramo com arestas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$.

A área (com sinal) do paralelogramo é igual ao determinante da matriz $\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$. Como a segunda matriz é a identidade, cujo determinante é 1, pelo Teorema 6.16 da p.182 (determinante do produto), a área é igual a $\det T$. Logo a área (sem sinal) do paralelogramo é $|\det T|$.

No caso geral, as arestas do quadrado são $k\mathbf{e}_1$ e $k\mathbf{e}_2$. Logo as arestas do paralelogramo são $T(k\mathbf{e}_1) = kT(\mathbf{e}_1)$ e $T(k\mathbf{e}_2) = kT(\mathbf{e}_2)$. A área (com sinal) do paralelogramo é igual a $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ kT(\mathbf{e}_1) & kT(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k^2 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = k^2 \det T$. Como $k^2 = \text{área}(Q)$, $\text{área}(T(Q)) = k^2|\det T| = \text{área}(Q)|\det T|$. ∎

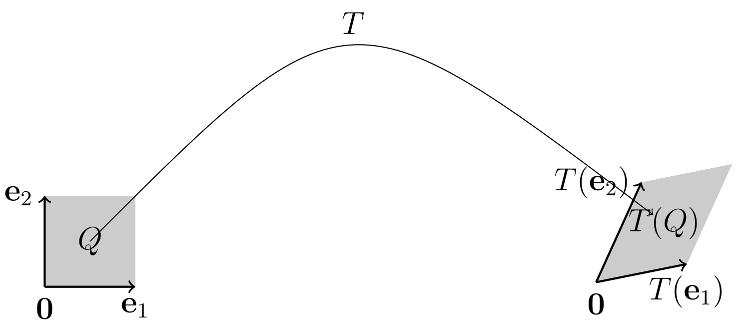


Figura 6.7: Imagem do Quadrado Q pela TL T

O próximo teorema estabelece a relação entre determinante e modificação de área de uma região do plano após a aplicação de uma transformação linear. É utilizado na mudança de variáveis em integrais múltiplas.

Teorema 6.16 (modificação de área por TL) *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado (área finita) qualquer. Então:*

PROPRIEDADE *10: área$(T(\Omega))$ = área$(\Omega) \cdot |\det T|$.*

Prova: Vamos supor que $\det T \neq 0$ e portanto T é uma bijeção, pois caso contrário o resultado seria verdadeiro pois ambos os lados seriam iguais a zero.

Divida Ω em quadrados Q_i disjuntos paralelos aos eixos x e y de modo que sua união aproxime a região Ω (vide Figura 6.8). Pelo Lema anterior, $\text{área}(T(Q_i)) = \text{área}(Q_i)|\det(T)|$. Como os quadrados Q_i são disjuntos e T é bijeção, $T(Q_i)$ são paralelogramos disjuntos.

Finalizamos a prova somando os quadrados e passando ao limite com o tamanho dos quadrados tendendo a zero. Sem o devido rigor, desprezando as frações de quadrados, somando os quadrados e colocando $\det T$ em evidência,
$\text{área}(T(\Omega)) \approx \sum_i \text{área}(T(Q_i)) = |\det T| \sum_i \text{área}(Q_i) \approx |\det T| \text{área}(\Omega)$. ∎

Observação 6.9 *Pode-se generalizar: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto qualquer. Então $\text{Volume}(T(\Omega)) = \text{Volume}(\Omega) \cdot |\det(T)|$.*

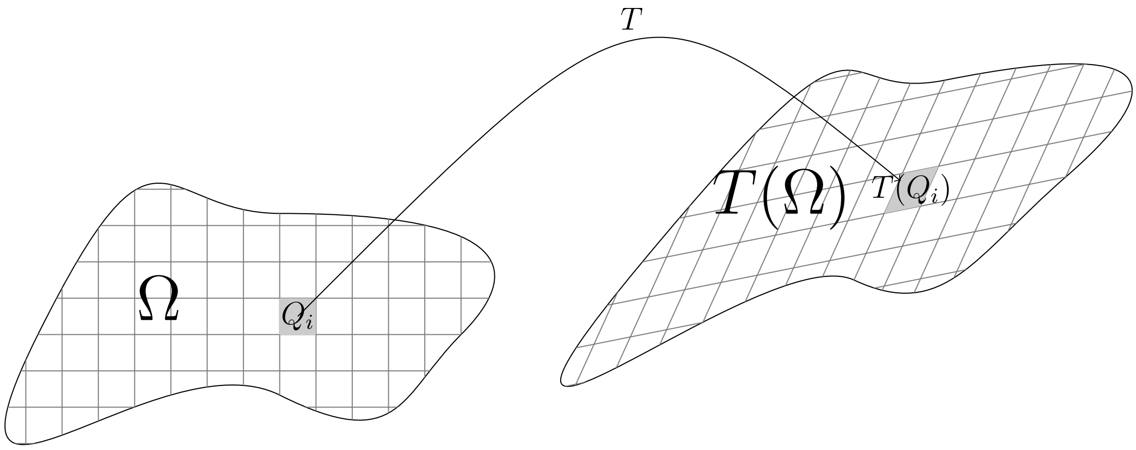


Figura 6.8: Região Ω e sua Imagem $T(\Omega)$.

Observação 6.10 (reinterpretando determinante do produto) *Reinterpretamos a Propriedade 9 (determinante do produto) da seguinte forma. Dado $C = AB$, composição das TLs A e B, a distorção de área (ou volume) de C é igual ao produto da distorção de A pela distorção de B.*

6.6 Produto Vetorial e Misto

Nesta seção introduzimos o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Remeto o leitor para a Definição 6.23 da p.192 para sua generalização para o $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.17 (produto vetorial) *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ definimos*

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

*o **produto vetorial** entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, componente a componente, por* $w_i = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{e}_i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$.

Lema 6.18 (propriedades do produto vetorial) *Sejam $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$:*

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$;

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ *(antisimétrica);*

(c) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{z} + k\mathbf{v} \times \mathbf{z}$ *(bilinear);*

(d) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ *(orientação e normalização);*

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é perpendicular a* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

(f) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ *é igual a área do paralelogramo gerado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Prova: Deixamos para o leitor verificar (a)–(d). (e) Seja $\mathbf{v} = \sum v_i e_i$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \sum w_i v_i = \sum \det \left[\ \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{e}_i\ \right] v_i =$ (pela linearidade do determinante) $\det \left[\ \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \sum v_i e_i\ \right] = \det \left[\ \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{v}\ \right] = 0$.

(f) Defina $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ (normalização do vetor $\mathbf{w}$). Como $\widetilde{\mathbf{w}}$ é unitário e perpendicular aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \widetilde{\mathbf{w}}$ é igual a área do paralelogramo P gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (porque?). Logo área de P é igual a $\left|\det\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \widetilde{\mathbf{w}}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}\right|$.

Como $\widetilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\sum w_i\mathbf{e}_i$, pela multilinearidade do determinante:

$$\text{área}(P) = \left|\det\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \widetilde{\mathbf{w}}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\sum w_i \det\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{e}_i\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\sum (w_i)^2\right| = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|.$$

■

Observação 6.11 (regra da mão direita, orientação e produto vetorial) *Supondo que* $H = \operatorname{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ *é um plano (caso contrário* $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *— veja exemplo abaixo),* $H^\perp = r$ *é uma reta. A propriedade (e) do lema mostra que* $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} \in r$ *(porque?). Assim sabemos a* ***direção*** *de* $\mathbf{w}$*: paralelo à reta* r*.*
A propriedade (f) determina o ***tamanho*** *de* $\mathbf{w}$*. Defina* k *como a área do paralelogramo e* $\widetilde{\mathbf{z}}$ *um vetor unitário que gera a reta* r*, então (porque?)* $\mathbf{w} = k\widetilde{\mathbf{z}}$ *ou* $-k\widetilde{\mathbf{z}}$*.*
Fica faltando somente o sentido de $\mathbf{w}$ *(duas possibilidades). O* ***sentido*** *correto é dado pela* ***regra da mão direita*** *(veja próxima seção).*

Exemplo 6.9 *Mostre que se* $H = \operatorname{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ *é uma reta ou* $\{\mathbf{0}\}$*, então* $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$*.*
Solução: *Como* H *é uma reta ou* $\{\mathbf{0}\}$*, o paralelogramo gerado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é degenerado e portanto possui área zero. Pela propriedade (e),* $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$*.* ■

Exemplo 6.10 *Determine:*

(a) um vetor não-nulo perpendicular, simultaneamente, aos vetores $(1,2,0)$ *e* $(3,2,1)$*;*

(b) a área do triangulo do $\mathbb{R}^3$ *cujos vértices são* $(1,2,1)$*,* $(2,1,2)$ *e* $(3,-1,2)$*;*

(c) $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *tal que o conjunto solução de* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0\\ 2x + 2y + z = 0\end{cases}$ *seja* $r = \operatorname{span}\{\mathbf{w}\}$*.*

Solução: *(a)* $(1,2,0)\times(3,2,1) = (2,\ -1,\ -4)$*.*

(b) Defina $\mathbf{u} = (2,1,2)-(1,2,1) = (1,\ -1,\ 1)$ *e* $\mathbf{v} = (3,-1,2)-(1,2,1) = (2,\ -3,\ 1)$*. Como a área do triângulo gerado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é a metade da área do paralelogramo gerado, calculamos* $1/2\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = 1/2\|(2,\ 1,\ -1)\| = 1/2\sqrt{6}$*.*

(c) É claro que poderíamos resolver o sistema. Mas se $\mathbf{w} = (x,y,z)$ *as equações do sistema dizem que* $\mathbf{w}$ *é perpendicular simultanemanete aos vetores* $(2,\ -3,\ 1)$ *e* $(2,\ 2,\ 1)$*. Logo* $\mathbf{w} = (2,\ -3,\ 1)\times(2,\ 2,\ 1) = (-5,\ 0,\ 10)$*.* ■

Definição 6.19 (produto misto) *Dados* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *definimos o* ***produto misto*** *entre eles por* $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}\,|\mathbf{z}\rangle = \det\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{z}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}$*.*

6.7 ⋆Sinal do Determinante[1]

Para esta seção reveja (na `Wikipedia: Regra da Mao direita`) a regra da mão direita.

[1] A leitura desta seção é opcional.

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ quando o $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ é positivo e quando é negativo?

Obtemos a resposta pela regra de mão direita: fechando os dedos da mão direita, partindo de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{v}$ por ângulo menor que 180 graus, e determinando para onde o polegar aponta. Se for saindo do papel, o determinante é positivo, se for entrando é negativo.

Para ilustrar considere a sequência da Figura 6.9. Mantendo fixo o vetor $\mathbf{u}$ e variando $\mathbf{v}$, sempre com o mesmo tamanho, mas formando ângulos distintos com $\mathbf{u}$, obtemos paralelogramos com áreas variando. Observe que quando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vão ficando mais próximos de serem colineares a área vai tendendo para zero. Ilustramos os dois casos, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares mas com mesmo sentido ou com sentido oposto, quando a área do paralelogramo formado é zero. Devido a escolhas feitas, quando o paralelogramo está acima do vetor $\mathbf{u}$ a área é positiva, quando está abaixo é negativa. O ciclo representado na figura, iniciando no alto e girando no sentido anti-horário, em termos de sinal da área, é: positivo $\to 0 \to$ negativo $\to 0 \to$ positivo $\cdots$. Utilize a figura para verificar a regra da mão direita.

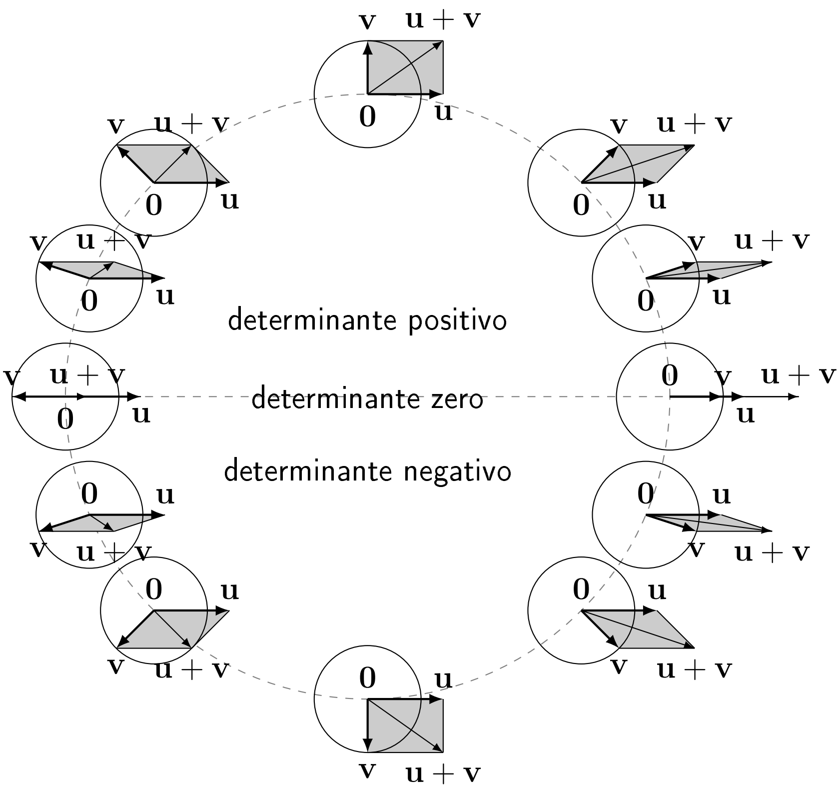


Figura 6.9: Variação do Sinal do $\det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$.

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ quando o $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ é positivo e quando é negativo?

Obtemos a resposta, novamente, pela regra de mão direita. Dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, eles geram um plano Π que divide o espaço em dois semi-espaços. Se $\mathbf{w} \in \Pi$, então o determinante é zero (porque?). Caso contrário, dependendo de qual semi-espaço o vetor $\mathbf{w}$ pertence, o determinante será positivo ou negativo. Se $\mathbf{w}$ pertencer ao mesmo semi-espaço que o polegar após aplicação da regra da mão direita, o determinante será positivo, caso contrário, negativo.

6.8 ⋆Regra de Cramer[1]

Vamos deduzir uma **fórmula explícita** da solução de sistemas lineares conhecida como **regra de Cramer**, partindo de propriedades do determinante. Como a fórmula é computacionalmente ineficiente (por envolver o cálculo de n determinantes), utiliza-se a eliminação de Gauss ou outros métodos mais sofisticados para se resolver um sistema.

Lema 6.20 (Regra de Cramer) *Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com*

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \dots & \mathbf{v_{i-1}} & \mathbf{v}_i & \mathbf{v_{i+1}} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Caso tenha solução única, os componentes x_i da solução $\mathbf{x}$ serão dados por:

$$x_i = (\det A)^{-1} \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \dots & \mathbf{v_{i-1}} & \mathbf{b} & \mathbf{v_{i+1}} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

onde a matriz acima à direita é A com a i-ésima coluna substituída pelo vetor $\mathbf{b}$.

Prova: Da definição do produto matriz-vetor como combinação linear de colunas, escrevemos o sistema como $x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_n\mathbf{v_n} = \mathbf{b}$.

Vamos primeiro determinar x_1 para depois fazer o caso geral em cima do mesmo princípio. Determinamos x_1 passando $\mathbf{b}$ para outro lado e obtendo $1\cdot(x_1\mathbf{v_1}-\mathbf{b})+x_2\mathbf{v_2}+\cdots+x_n\mathbf{v_n} = 0$.

Concluímos que são LDs (note que o primeiro coeficiente é não-nulo igual a 1) os vetores $(x_1\mathbf{v_1} - \mathbf{b}), \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$. Logo $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ x_1\mathbf{v_1} - \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = 0$. A linearidade do determinante implica que

$$x_1 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = 0.$$

Logo,

$$x_1 \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = x_1 \det A = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

de onde segue o resultado.

De forma geral, determinamos x_i passando $\mathbf{b}$ para o outro lado:

$$x_1\mathbf{v_1} + \cdots + 1 \cdot (x_i\mathbf{v_i} - \mathbf{b}) + \cdots + x_n\mathbf{v_n} = 0.$$

Concluímos (novamente) que são LDs os vetores $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{i-1}}, (x_i\mathbf{v_i} - \mathbf{b}), \mathbf{v_{i+1}}, \dots, \mathbf{v_n}$.

Aplicando o determinante e usando sua linearidade, fazendo raciocínio análogo ao que fizemos para obter x_1, chegamos a fórmula para x_i. ■

Utilizando a regra de Cramer podemos obter uma fórmula explicita para a matriz inversa. Veja `Wikipedia: Matriz inversa`.

[1] A leitura desta seção é opcional.

6.9 Exercícios de Determinantes

6.9.1 Exercícios de Fixação

Fix 6.1: Determine se é Verdadeira ou Falsa:

(a) se as colunas de A são LDs, então $\det(A) = 0$;

(b) se $\det(A) = 0$, então duas linhas ou colunas são iguais ou então uma linha ou coluna tem somente zeros;

(c) se B é obtida de A trocando duas linhas de A entre si, $\det(B) = \det(A)$;

(d) se as linhas de A são LIs, então $\det(A) > 0$.

Fix 6.2: B é quadrada com $\det(B) = -2$.

(a) $\det(B^T) =$ __; (b) $\det(B^{-1}) =$ __; (c) $\det(B^5) =$ __.

Fix 6.3: A, B, C são matrizes quadradas.

(a) $\det(A + B)$ _______($=, \neq$, *pode ser* $=$ *ou* $\neq$) $\det(A) + \det(B)$;

(b) $\det(AB)$ _______($=, \neq$, *pode ser* $=$ *ou* $\neq$) $\det(A)\det(B)$;

(c) Se $\det(A) = -3$, $\det(B) = 2$ e $\det(C) = 5$, então $\det(ABC) =$ _____.

Fix 6.4:

(a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$__; (b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$__;

Fix 6.5: $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, com $\det(A) = 7$.

(a) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2\mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$ ____; (b) $\det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & 3\mathbf{v} - \mathbf{w} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$ ____;

(c) $\det \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{w} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{v} + \mathbf{u} - \mathbf{w} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{u} & \rightarrow \end{bmatrix} =$ ____; (d) $\det \begin{bmatrix} \leftarrow 2\mathbf{u} \rightarrow \\ \leftarrow 2\mathbf{v} \rightarrow \\ \leftarrow 2\mathbf{w} \rightarrow \end{bmatrix} =$ ____.

(e) Se $\text{área}(Q) = 6$, então $\text{área}(\{A\mathbf{v};\ \mathbf{v} \in Q\}) =$____ e $\text{área}(\{\mathbf{w};\ A\mathbf{w} \in Q\}) =$____;

(f) Se $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$, então $a + b + c =$ ____.

Fix 6.6: Se $\det(A) = 4$, o sistema:

(a) $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

(b) $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

Se $\det(B) = 0$, o sistema:

(c) $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*);

[1] Versão 03.out.2012 09h

(d) $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui ____________________(*nenhuma solução, uma única solução, infinitas soluções, nenhuma ou infinitas soluções*).

Fix 6.7: Se $\det(B) = 0$:

(a) e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, então $\mathbf{u}$ é __________ (*múltiplo de, perpendicular a*) $\mathbf{v}$;

(b) e $B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, então $\mathbf{u}$ é __________ (*múltiplo de* $\mathbf{v}$, *perpendicular a* $\mathbf{w}$, *múltiplo de* $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, *pertence ao plano gerado por* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$);

(c) colunas de B são _____(*LIs, LDs*); (d) linhas de B são _____(*LIs, LDs*).

Fix 6.8: Seja $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ linear.

(a) $\operatorname{Nuc} T \neq 0$ se, e somente se $\det T$ ___ $(= 0, \neq 0)$;

(b) se $\det T = 5$, então $\dim(\operatorname{Nuc} T)$ ___ $(= 5, = 6, = 0, \neq 0)$;

(c) se existe T^{-1}, então $\det(T)$ ___ $(= 1, = -1, = 0, \neq 0)$;

Fix 6.9: Seja A 4×4.

(a) se posto$(A) = 4$, então $\det A$ ___ $(= 0, \neq 0, = 4)$;

(b) se posto$(A) = 2$, então $\det A =$ ___ $(= 0, \neq 0, = 2)$;

(c) se $\det(A) = 3$, então posto$(A) =$ ___ $(0, 1, 2, 3, 4)$;

(d) se $\det(A) = 0$, então posto(A) ___ $(= 0, = 1, = 2, = 3, = 4, > 0, > 2, < 4)$.

Fix 6.10: Sejam A matriz quadrada, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$: $\det(A - \lambda I)$ _____$(= 0, \neq 0)$.

Fix 6.11: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$ com $\det(A) = 4$.

(a) a área do triângulo com vértices em $(0,0), (2,a), (3,b)$ é _____;

(b) a área do triângulo com vértices em $(0,0), (2,3), (a,b)$ é _____;

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ b \end{bmatrix}$. Se $\lambda_1\mathbf{u} = \lambda_2\mathbf{v}$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então $\lambda_1 =$ ___ e $\lambda_2 =$ ___.

6.9.2 Problemas

Prob 6.1: Calcule o determinante das matrizes abaixo

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

Prob 6.2: Aplicamos em uma matriz A 5×5 as seguintes operações elementares:

(i) trocamos l_5 com l_4; (ii) $l_4 \leftarrow l_4 + 3l_2$; (iii) multiplicamos l_4 por -4.

Obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$.

Prob 6.3: Para cada matriz A abaixo determine todos $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $A - \lambda I$ não seja invertível:

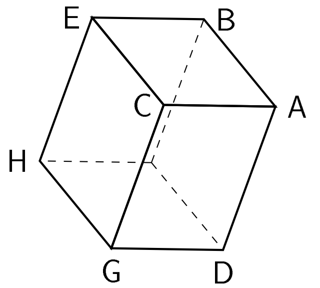
(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Prob 6.4: A imagem do círculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ pela transformação linear $(x,y) \mapsto (2x-y, 2x+y)$ é a elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 6xy + 5y^2 \le 16\}$. Qual é a área compreendida por esta elipse?

Prob 6.5: Divida (trocando linhas, se necessário) em blocos para calcular o determinante de:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Prob 6.6: Calcule o volume do paralelepípedo abaixo, cujos vértices são:
$A = (2,3,4)$, $B = (0,8,7)$, $C = (-1,5,9)$, $D = (2,-1,10)$,
$E = (-3,10,12)$, $F = (0,4,13)$, $G = (-1,1,15)$, $H = (-3,6,18)$.



Prob 6.7: Se $T(x,y,z,w) = (z+y,\ x-2y,\ z,\ w)$, calcule o $\det(T)$.

Prob 6.8: Calcule:

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & b & f & g \\ a & h & i & j \end{bmatrix}$, (b) $|\det M|$, $M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 & x \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & x & x \end{bmatrix}$.

Prob 6.9: Considere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

(b) Qual o erro na "prova" que $\det(A^{-1})$ é sempre 1: $\det(A^{-1}) =$

$$= \det\left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{ad-bc} \det \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}(ad-bc) = 1.$$

Prob 6.10: Considere B uma matriz 3×3 cujas entradas você desconhece.

(a) Qual o menor número de zeros que devemos colocar nas entradas de B para garantir que $\det B = 0$? Onde devem ser colocados?

(b) E para uma matriz $n \times n$?

Prob 6.11: Mostre que a equação da reta em $\mathbb{R}^2$ que passa por $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ é dada por $\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$;

6.9.3 Extras

Ext 6.1: Se A é uma matriz $n \times n$ com $\det(A) = -3$, então:
(a) $\det(A + A) =$ __; (b) $\det(3A) =$ __; (c) $\det(A^5/3) =$ __;

Ext 6.2: B uma matriz quadrada.
(a) se uma linha é múltipla de outra, então B ______ (*possui/não possui*) inversa;
(b) se nenhuma linha é múltipla de nenhuma outra, então __________ ($\det(B) \neq 0$, $\det(B) = 0$, *nada podemos afirmar*).

Ext 6.3: Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear preserva área. Isto implica que T preserva comprimentos também?

Ext 6.4: Sabe-se que três arestas adjacentes ao vértice $(0, 0, 0)$ de um paralelepípedo no $\mathbb{R}^3$ são determinados pelos vértices $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ e $(2, 2, -1)$. Calcule o volume do paralelepípedo.

Ext 6.5: Seja $T(x, y, z) = (x + z,\ 2x + y + 3z,\ z - x)$. Considere o cubo

$$C = \{ae_1 + be_2 + ce_3;\ a, b, c \in [0, 3]\}.$$

Determine o volume do paralelepípedo

$$T(C) = \{aT(e_1) + bT(e_2) + cT(e_3);\ a, b, c \in [0, 3]\}.$$

Ext 6.6: Sejam a, b, c números reais positivos. Determine o volume do elipsóide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$ encontrando um conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ e uma transformação linear T tal que $T(B) = E$.

Ext 6.7: Calcule o determinante das matrizes abaixo

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 11 & -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ext 6.8: Para cada matriz A abaixo determine todos $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $A - \lambda I$ não seja invertível:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ext 6.9: Diz-se que uma matriz quadrada P é uma **projeção** (ou **projeção oblíqua**, para enfatizar que pode não ser ortogonal) se $P^2 = P$. Mostre que $\det(P)$ é 0 ou 1.

Ext 6.10: Suponha que A e B são matrizes quadradas $n \times n$ com $AB = I$. Prove que $BA = I$.

Ext 6.11: Suponha $A^k = I$. Prove que
(a) se k é ímpar, então $\det(A) = 1$; (b) se k é par, então $\det(A) = 1$ ou -1.

Ext 6.12:
(a) Prove (usando determinante) que não existe matriz A 3×3 (com entradas reais) tal que $A^2 = -I_{3\times 3}$ (identidade);
(b) Tome $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e mostre que $B^2 = -I_{2\times 2}$ (identidade) e portanto, num certo sentido, $B = \sqrt{-I}$. (A matriz B é uma rotação de 90^o.)

Ext 6.13:

Definição 6.21 *Diz-se que uma matriz quadrada S é* ***anti-simétrica*** *se $S^T = -S$.*

(a) Mostre que $\det S = 0$ se S é $n \times n$ com n impar.
(b) Dê um exemplo de S 2×2 anti-simétrica e $\det S \neq 0$

Ext 6.14: Suponha N nilpotente (veja Definição 4.57 da p.131) , isto é, $N^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que N não é invertível.

Ext 6.15:

Definição 6.22 *Diz-se que uma matriz quadrada Q é* ***ortogonal*** *se $Q^TQ = I_{n\times n}$ (identidade).*

Mostre que $\det(Q)$ é 1 ou -1.

Ext 6.16: Deduza a fórmula do determinante da matriz 3×3 mostrada na Figura 6.6 da p.174 completando os detalhes do que foi feito lá.

Ext 6.17: Considere $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, com A, B, C e D matrizes quadradas 2×2. Dê um exemplo que mostre que nem sempre $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Ext 6.18: Considere a matriz (em blocos) $M = \begin{bmatrix} X & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$, com A, X quadradas e I a matriz identidade, todas de mesmo tamanho. Prove que $\det(M) = \det(A)$.

Ext 6.19: Sejam A, B matrizes quadradas de mesma dimensão. Prove que $\det(AB) = \det(BA)$ (verdade mesmo que $AB \neq BA$).

Ext 6.20: Suponha que $A = PDP^{-1}$ com $D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$ diagonal. Prove que $\det(A^k) = (n!)^k$.

Ext 6.21: Se A e B são invertíveis:
(a) $A + B$ é invertível? (b) AB é invertível? (c) A^TB é invertível?

Ext 6.22: Se AB é invertível, então A é invertível?

Ext 6.23: Determine uma fórmula geral para o determinante da matriz $n \times n$ cujos únicos elementos não-nulos são $a_{ij} = 1$ com $i + j = n + 1$: $M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ext 6.24: Mostre que a equação do plano em $\mathbb{R}^3$ que passa por $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ é dada por $\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Ext 6.25: (a) Mostre que a área do triângulo com vértices em $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3)$ é dada por $1/2 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) O determinante acima pode ser calculado montando a matriz $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}$ e fazendo a soma do produto da diagonal com sinal positivo numa direção e negativo na outra. Este esquema permite obter fórmula de área de polígono qualquer (já que área é igual a soma das áreas dos triângulos) com vértices em $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ utilizando a matriz $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & \cdots & y_n & y_1 \end{bmatrix}$. Determine-a.

Ext 6.26:

(a) Calcule o determinante da matriz $\lambda I_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$.

(b) Seja A uma matriz $n \times n$. Se $\det(A)$ é conhecido, calcule $\det(\lambda A)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que, em geral, **não é** $\lambda \det(A)$.

(c) Interprete estes resultados em termos de volume. O que acontece com a área de um quadrado se dobramos o comprimento dos seus lados? O que acontece com o volume de um cubo se dobramos o comprimento das suas arestas? Mais geralmente, o que acontece com um sólido em $\mathbb{R}^n$ se ampliamos (ou reduzimos) suas dimensões lineares por um fator multiplicativo λ?

6.9.4 Desafios

Des 6.1: A Definição 6.17 da p.183 pode ser generalizada para se definir o produto vetorial entre $n-1$ vetores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.23 (produto vetorial) *Dados* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ *definimos*

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 \times \cdots \times \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n,$$

o ***produto vetorial*** *entre* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$*, componente a componente, por*

$$w_i = \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{e}_i \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Mostre que:

(a) este produto possuirá as mesmas propriedades que o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ (anti-simétrica, linear em cada fator, orientação e normalização);

(b) $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \times \cdots \mathbf{u}_{n-1}$ é perpendicular a cada $\mathbf{u}_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Des 6.2:

Definição 6.24 (Wronskiano) *Dado um conjunto* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ *de funções infinitamente diferenciáveis definimos o* **wronskiano** $W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)(x)$ *como o determinante da matriz*

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que se $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ é LD, então $W(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)(x) = 0$ para todo x;

(b) conclua de (a) que se $W(x_0) \neq 0$ para algum x_0, então o conjunto de funções é LI;

(c) use (a) para provar que $\{1, x, e^x\}$ é LI;

(d) é claro que o conjunto de funções $\{x^2, \ x|x|\}$ é LI (porque?). Por outro lado, $W(x^2, \ x|x|)(x) = 0$ para todo x. Isto não implica por (b) que o conjunto é LD?

Obs: $(x|x|)' = 2|x|$.

Des 6.3: (**regra de Chió**) Através dessa regra é possível abaixar em uma unidade a ordem de uma matriz quadrada A sem alterar o valor do seu determinante. Seja B uma matriz quadrada, prove que $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{v} & B \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c} B - \mathbf{v}\mathbf{u}^T \end{array} \right]$. Verifique que esta é a regra de Chió.

Des 6.4: (determinante de Vandermonde 3×3) Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

Des 6.5: Considere o seguinte problema: Dados pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ com $i = 0, \ldots, n$ determine polinômio $p(x)$ de grau n tal que $p(x_i) = y_i$.

(a) Monte um sistema linear para determinar os coeficientes a_i do polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$;

(b) Defina $M = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$ (conhecida como matriz de Vandermonde). Mostre que o sistema pode ser escrito como $M \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

(c) Mostre que $\det M = \prod_{k<n} (x_n - x_k)$.

Des 6.6: Prove que $\det \begin{bmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{bmatrix} = 1 + a + b + c + d.$

Des 6.7: Prove que uma matriz com todas entradas racionais possui um determinante racional.

Des 6.8: Seja A uma matriz $n \times n$ com $|a_{ij}| \le k$. Usando a idéia de determinante como volume, mostre que $|\det A| \le (k\sqrt{n})^n$.

Des 6.9: Considere a matriz tridiagonal $n \times n$ $A_n = \begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{bmatrix}$. Defina $d_n = \det(A_n)$.

(a) Prove que $d_{n+1} = ad_n - bcd_{n-1}$.

(b) suponha que $a = 2$ e $b = c = -1$. Prove que $\det(A_n) = n + 1$.

Des 6.10: Calcule:

(a) [2] $\det \begin{bmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{bmatrix}$; (b) $\det \begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$; (c) [3] $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Des 6.11: (Cálculo do posto de uma matriz utilizando determinante de submatrizes) Prove que para qualquer matriz o posto é k se, e somente se, k é o maior inteiro tal que existe uma submatriz $k \times k$ com determinante não-nulo.

Des 6.12: Existem 16 matrizes 2 por 2 cujas entradas possuem somente 0's e 1's. Quantas delas são invertíveis?

[2]Veja [12] p.29, #9.
[3]Veja [13] p.216 #10.

Capítulo 7

Autovetores e Diagonalização

Definimos autovalores e autovetores de transformações lineares em espaços vetoriais com ênfase no $\mathbb{R}^n$. Algumas aplicações são:

(a) calcular potências (A^k) e raíz quadrada ($\sqrt{A}$) de matriz;

(b) determinar se o sinal de $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ é sempre positivo ou negativo ou indeterminado (classificação de formas quadráticas);

(c) determinar estado limite de um sistema iterado: começando num estado $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ e evoluindo por $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$, determinar $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n$.

(d) classificar cônicas e quádricas (ver `Wikipedia`).

(e) caracterizar geometricamente uma TL.

7.1 Autovalores e Autovetores

Problema Central deste Capítulo

Dada transformação linear $T : V \to V$, existe $\mathbf{v} \in V$ não-nulo tal que $\mathbf{v}$ e $T\mathbf{v}$ são paralelos? De forma equivalente: existe direção preservada por T? Como calculá-la?

Definição 7.1 (autovalor, autovetor e espectro) *Seja $T : V \to V$ transformação linear. Dizemos que $\mathbf{v} \in V$ **não-nulo** é **autovetor** associado ao **autovalor** λ se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. O conjunto de autovalores de T é chamado de **espectro** de T.*

Observação 7.1

*(a) λ pode ser zero, mas $\mathbf{v}$ não. De fato a "direção" $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ é sempre preservada por uma TL qualquer pois $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ mas $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **não** é autovetor.*

(b) Se $\mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}\, T$ é não-nulo, então é autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$ pois $T\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

*(c) O autovetor associado a um autovalor **não** é único. De fato, se $\mathbf{v}$ é autovetor qualquer e $k \neq 0$, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ também é autovetor pois $T(\mathbf{w}) = T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\lambda\mathbf{v} = \lambda(k\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}$.*

Para ilustrar estes conceitos de forma geométrica estude o Exemplo 7.5 da p.199 e Exemplo 7.6 da p.199. Observe nestes exemplos que:

(a) qualquer múltiplo de direção preservada também será preservada: autovetor **não é único**;

[1]Versão 04.out.2012 16h

(b) podem existir nenhuma, uma, duas, etc. ou infinitas direções preservadas;
(c) zero pode ser autovalor.

Como calcular autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

Para que $\mathbf{v}$ seja autovetor basta que

$$T\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = T\mathbf{v} - (\lambda I)\mathbf{v} = (T - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{com} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Portanto $\mathbf{v}$ é elemento não-nulo do $\operatorname{Nuc}(T-\lambda I)$. Pelo Teorema 6.11 da p.177, $\operatorname{Nuc}(T-\lambda I) \neq \mathbf{0}$ se, e somente se, $\det(T - \lambda I) = 0$. Este determinante será um polinômio em λ (veja Exercício 7.4 da p.214).

Definição 7.2 (polinômio característico) *Dada transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos o* ***polinômio característico*** *de T por $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$.*

Como o conjunto de autovetores associados ao autovalor λ é igual ao $\operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ após retirarmos o vetor nulo, este conjunto é chamado de **autoespaço** associado a λ.

Definição 7.3 (Autoespaço) *de T associado ao autovalor λ é o $\operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$.*

Em resumo, dado $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

- Determinamos **autovalores** calculando os zeros do polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$. Devemos preservar uma expressão fatorada por ser muito difícil determinar raízes de polinômios de grau 3 em diante (veja Observação 6.8 da p.180);
- Determinamos os **autovetores** resolvendo o sistema $(T - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ para cada autovalor λ.

Exemplo 7.1 *Calcule os autovalores e autoespaços de* $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: *Autovalores: Como o polinômio característico* $p(\lambda) = \det(T - \lambda I) =$
$= \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 0)(\lambda - 2)$, *os autovalores são* 0 *e* 2.

Autoespaço para $\lambda = 0$: Resolvemos o sistema

$$(T - 0I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-0) & -1 \\ -1 & (1-0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$. *Portanto $x = y$, solução $(x, y) = t(1, 1)$ para $t \in \mathbb{R}$. Desta forma o autoespaço associado ao 0 é $\langle (1, 1) \rangle$. Um autovetor é $(1, 1)$ ou $(2, 2)$ ou $(1/2, 1/2)$ ou $(-1, -1)$ ou $(-100, -100)$ etc.*

Autoespaço para $\lambda = 2$: Resolvemos o sistema

$$(T - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-2) & -1 \\ -1 & (1-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$. *Portanto $x = -y$, solução $(x, y) = t(1, -1)$ para $t \in \mathbb{R}$. Desta forma o autoespaço associado ao 2 é $\langle (1, -1) \rangle$. Um autovetor é $(1, -1)$ ou $(2, -2)$ ou $(1/2, -1/2)$ ou $(-1, 1)$ ou $(-100, 100)$ etc.* ■

Observação 7.2 (Software Algébrico) *Pode-se calcular os* **autovalores** *e* **autovetores** *com a função do Maxima* `eigenvalues` *e* `eigenvectors`. *Entramos a matriz com* `M: matrix( [1,-1], [-1,1]);` *e calculamos:* `eigenvalues(M)[1];` *e* `eigenvectors(M)[2];`.

Exemplo 7.2 *Calcule autovalores e autovetores de* $T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução: *Autovalores: O polinômio característico é*
$p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{bmatrix}$. *Para calcular o determinante note que a matriz já é quase triangular inferior. Para zerar o* -1 *(linha* 1 *coluna* 2*), faça* $l_1 \leftarrow l_1 + l_2/(1-\lambda)$. *Obtemos*

$$\det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) - 1/(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Como a matriz é triangular, o determinante é $(-1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)-1)$. *Como* $(3-\lambda)(1-\lambda) - 1 = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda-2)^2$, $\det(T - \lambda I) = -(-1-\lambda)(\lambda-2)^2$. *Portanto os autovalores são* 2 *e* -1.

Autoespaço para $\lambda = 2$: *Resolvemos o sistema*

$$(T - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (3-2) & -1 & 0 \\ 1 & (1-2) & 0 \\ 1 & 0 & (-1-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$. *Portanto tomando* $z = t$, *solução* $(x, y, z) = t(3, 3, 1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$.
Desta forma o autoespaço associado ao 2 *é* $\langle (3, 3, 1) \rangle$.

Autoespaço para $\lambda = -1$: *Resolvemos o sistema*

$$(T + I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (3+1) & -1 & 0 \\ 1 & (1+1) & 0 \\ 1 & 0 & (-1+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. *Portanto* $x = y = 0$, *e* z *qualquer, solução* $(x, y, z) = t(0, 0, 1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$. *Desta forma o autoespaço associado ao* -1 *é* $\langle (0, 0, 1) \rangle$. ∎

Exemplo 7.3 (rotação no plano) *No Exemplo 4.9 da p.96 deduzimos que a matriz de rotação de vetores do plano por um ângulo* θ *(no anti-horário) é* $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. *Determine os autovalores e autoespaços para cada* θ.

Solução: *Polinômio característico:* $p(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$ *(identidade trigonométrica* $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$*). Como* $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\operatorname{sen}^2\theta$, $\Delta < 0$ *(raízes complexas) a não ser que* $\operatorname{sen}\theta = 0$, *ou seja, a não ser que* $\theta = 0°$ *ou* $180°$. *Portanto são três casos:*

(a) $\theta = 0°$. *Neste caso* $R = I$, *a matriz identidade. O único autovalor é* 1 *com com qualquer direção não-nula como autovetor.*

(b) $\theta = 180°$. *Neste caso* $R = -I$. *O único autovalor é* -1 *com qualquer direção não-nula como autovetor.*

(c) $\theta \notin \{0°, 180°\}$. *Neste caso não existe autovalor (real) e* ***nenhuma*** *direção é preservada.* ■

Observação 7.3 *Vamos explorar sob nova ótica o item (c) do exemplo anterior. Para fixar ideias examinamos o caso da rotação de 90 graus, sendo os outros casos análogos. Até agora trabalhamos com o espaço* $\mathbb{R}^2$ *de pares ordenados de números reais com escalares reais. Podemos considerar o espaço* $\mathbb{C}^2$ *de pares ordenados de números complexos com escalares complexos. Quase tudo que fizemos até aqui (exceto produto interno) se aplica sem alterações, em particular a solução de sistemas lineares, definição de núcleo e imagem, determinante, etc. Pensando desta forma, no caso da rotação por 90 graus,* $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *o polinômio característico é* $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, *os autovalores são* $\pm i$, *e os autovetores se calculam da forma usual. Calculamos o autoespaço para* $\lambda = i$ *resolvendo o sistema:*

$$(R - iI)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\left\{ \begin{aligned} -ix - y &= 0 \\ x - iy &= 0 \end{aligned} \right.$. *Escalonando obtemos (multiplique segunda linha por* i *e some com a primeira)* $\left\{ \begin{aligned} -ix - y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right.$. *Tomando* $x = 1$ *obtemos* $y = -i$. *Logo* $(1,\ -i) \in \mathbb{C}^2$ *é um autovetor de* R *associado a* $\lambda = i \in \mathbb{C}$ *pois*

$$R \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

De forma análoga (verifique!) $(1,\ i) \in \mathbb{C}^2$ *é um autovetor de* R *associado a* $\lambda = -i \in \mathbb{C}$.

Exemplo 7.4 *Determine autovalores e autoespaços das TLs em* $\mathbb{R}^2$ *abaixo. Com isto entenda a geometria da TLs.*

(a) $T(x, y) = (x + y,\ y)$; *(b)* $T(x, y) = (3/2x,\ 2y)$;

(c) $T(x, y) = (3/2x,\ -2y)$; *(d)* $T(x, y) = (x/2,\ 2y)$.

Solução: *(a) O único autovalor é* 1 *com autoespaço correspondente* $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ *(*$\mathbf{e}_1 = (1, 0)$*). Observe na Figura 7.1 o efeito desta TL, similar ao que ocorre com um baralho de cartas quando deslizamos as cartas uma por cima das outras. O efeito é deslocar os vetores mais para direita, para* $y > 0$, *mais para a esquerda, com* $y < 0$, *mantendo a componente* y. *Um exemplo são placas tectônicas da terra deslizando uma sobre a outra. É conhecida como* ***cisalhamento***

(b) São autovalores $3/2$ *e* 2, *com autoespaços respectivamente* $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ *e* $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$. *O círculo unitário é levado por* T *numa elipse. Esta transformação amplia os vetores na direção* x *e* y, *mas com ampliação maior na direção* y, *fazendo com que a imagem de um círculo seja uma elipse (veja Figura 7.2). É uma ampliação/redução elipsoidal com reflexão.*

(c) São autovalores $3/2$ *e* -2, *com autoespaços respectivamente* $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ *e* $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$.

Esta transformação amplia na direção y *mas refletindo no eixo* x *e amplia na direção* x *(veja Figura 7.2).*

(d) São autovalores $1/2$ *e* 2, *com autoespaços respectivamente* $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ *e* $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$.

Esta transformação amplia na direção y e reduz na direção x (Figura 7.3). É ampliação/redução elipsoidal. ■

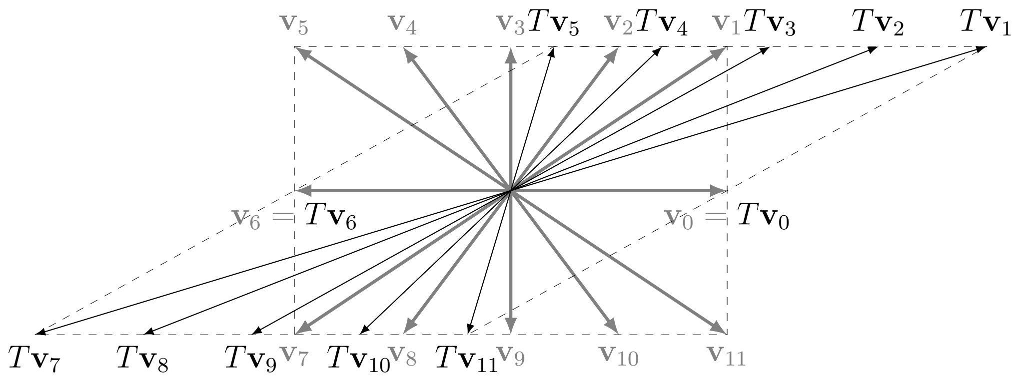


Figura 7.1: Cisalhamento: $T(x, y) = (x + y, y)$

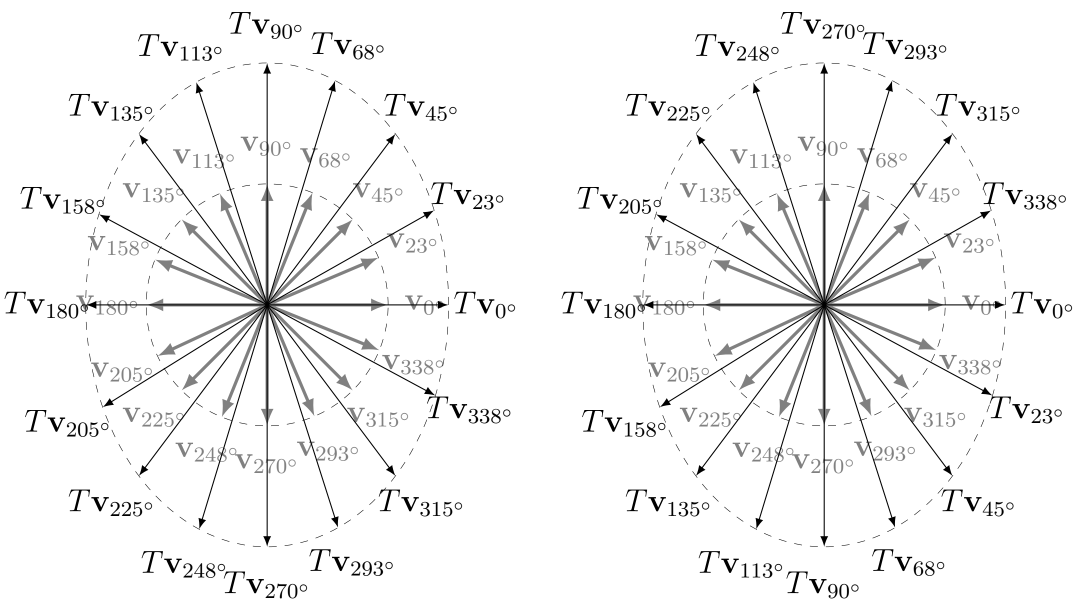


Figura 7.2: Ampliação Elipsoidal $T(x, y) = (3/2x, 2y)$ e Ampliação Elipsoidal com reflexão $T(x, y) = (3/2x, -2y)$

O próximo exemplo pode ser resolvido somente por geometria.

Exemplo 7.5 *Determine autovalores e autoespaços das TLs em $\mathbb{R}^2$:*

(a) Reflexão em torno do eixo x. *(b) Projeção no eixo x.*

Solução: *(a) Vetores no eixo x serão preservados. Assim 1 é autovalor com autoespaço $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$. Vetores no eixo y serão refletidos. Assim -1 é autovalor com autovetor $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$; Veja Figura 4.3 da p.96).*

(b) Vetores no eixo x serão preservados. Assim 1 é autovalor com autoespaço $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$. Vetores no eixo y serão levados no zero. Assim 0 é autovalor com autoespaço $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$; Veja Figura 4.4 da p.97. ■

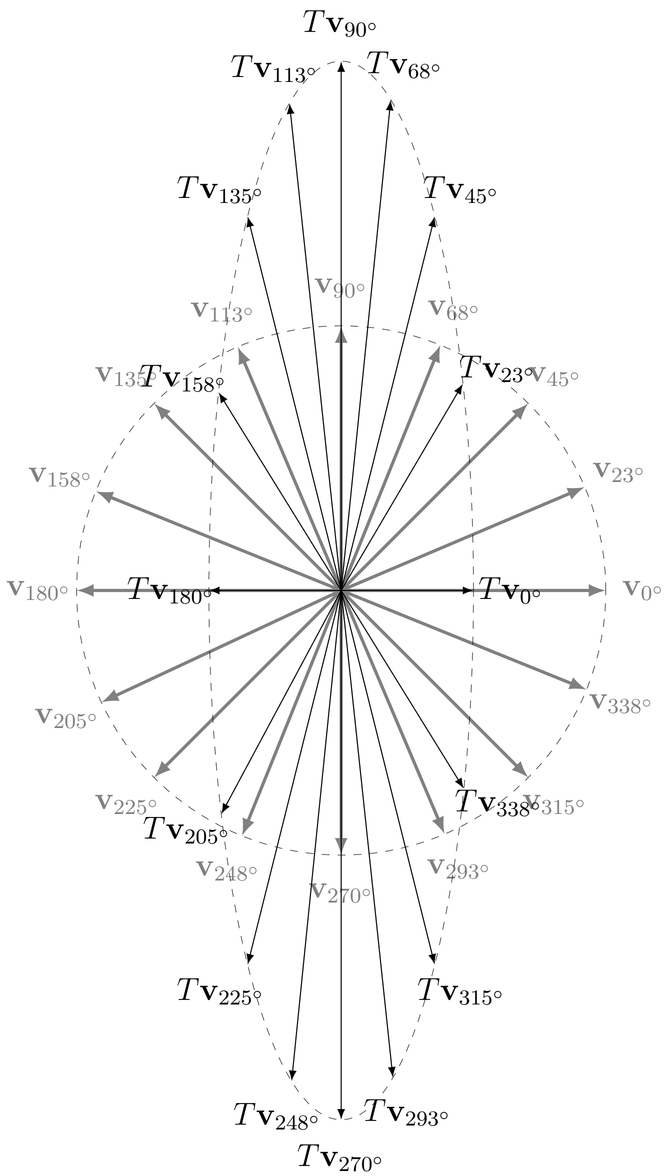


Figura 7.3: Ampliação/Redução Elipsoidal: $T(x, y) = (x/2, 2y)$

Exemplo 7.6 *Determine autovalores e autoespaço* **somente por geometria**[1] *das TLs em* $\mathbb{R}^3$*:*

(a) T *uma projeção ortogonal no plano* $z = 0$. *(b)* T *uma reflexão no plano* $y = 0$.

(c) T *uma projeção ortogonal na reta gerada pelo vetor* $(1, 2, 1)$.

Solução: *(a) São preservadas: direção* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ *(no eixo* x*) cuja imagem* $T\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1$*, direção* $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$*, no eixo* y*, cuja imagem* $T\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2$ *e direção* $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$*, no eixo* z*, cuja imagem* $T\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0) = 0\mathbf{e}_3$.

São autovalores 1*, com autoespaço* $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$*, e* 0*, com autoespaço* $\langle \mathbf{e}_3 \rangle$*. Veja Figura 4.5 da p.97. Assim o autoespaço associado ao autovalor* 1 *é o plano* $z = 0$ *e o autoespaço associado ao autovalor* 0 *é ao eixo* z*, que é perpendicular ao plano* $z = 0$.

(b) O plano $y = 0$ *é autoespaço associado ao autovalor* 1 *(porque?). Os vetores no eixo* y*, que é perpendicular ao plano* $y = 0$*, serão refletidos em torno do plano* $y = 0$*. Assim o*

[1] Em todos os exemplos, pelo Lema 7.6 da p.201, como a soma das dimensões dos autoespaços é 3, calculamos todos autovalores e autoespaços.

autoespaço associado ao autovalor -1 é o eixo y.

(c) Como $T(1,2,1) = (1,2,1)$, o vetor $(1,2,1)$ é um autovetor associado ao autovalor 0. Já vetores perpendiculares a $(1,2,1)$ como $(-1,0,1)$ ou $(0,-1,-2)$ são levados no zero e portanto são autovalores associados ao autovetor 0. Assim o autoespaço associado ao autovalor 1 é a reta $\langle(1,2,1)\rangle$ e o autoespaço associado ao autovalor 0 é o plano perpendicular ao vetor $(1,2,1)$ que denotamos por $\langle(1,2,1)\rangle^\perp$. ■

Na teoria (mais avançada) de equações diferenciais determinamos autovalores e autovetores (chamados de autofunção) dos operadores lineares derivada primeira e derivada segunda no espaço das funções reais diferenciáveis $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (espaço de dimensão infinita).

Exemplo 7.7 *Para cada $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ abaixo, determine um autovetor (também chamado de autofunção) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ associado ao:*

(a) autovalor 3 se $Tf = f'$; (b) autovalor -4 se $Tf = f''$.

Solução: *(a) $f(t) = \exp(3t)$ pois $f'(t) = 3\exp(3t)$, isto é, $Tf = f' = 3f$. Note que $g(t) = C\exp(3t)$ também será autofunção para qualquer $C \in \mathbb{R}$.*

(b) Uma possibilidade é $f(t) = \sin(2t)$ pois $f'(t) = 2\cos(2t) \Longrightarrow f''(t) = -4\sin(2t)$, isto é, $f'' = -4f$. Outra função é $f(t) = \cos(2t)$ pois $f'(t) = -2\sin(2t) \Longrightarrow f''(t) = -4\cos(2t)$, isto é, $Tf = f'' = -4f$. Combinações lineares de $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$ também serão autofunção, isto é, $g(t) = C_1\operatorname{sen}(2t) + C_2\cos(2t)$ com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ também será autofunção. ■

7.2 Diagonalização

Definição 7.4 (matriz diagonalizável) *Dizemos que uma matriz quadrada A é **diagonalizável** se existe P invertível tal que $P^{-1}AP = D$ (ou de forma equivalente $A = PDP^{-1}$), com D diagonal.*

Observação 7.4 *Portanto se A é diagonalizável, $AP = PD$. Note que se $P = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ e D é matriz diagonal com $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, então $AP = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \cdots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ Assim, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Logo as colunas de P são autovetores de A com autovalores na diagonal de D.*

Definição 7.5 (decomposição espectral) *Se A é diagonalizável chamamos de **decomposição espectral** de A uma fatoração $A = PDP^{-1}$ com D diagonal e P invertível.*

A série de Lemas e Corolários que vamos apresentar vão permitir obter condições para garantir que uma matriz é diagonalizável ou não.

Lema 7.6 *Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de A e H_i autoespaço associado a λ_i. Se $\beta_1 \subset H_1, \ldots, \beta_n \subset H_n$ são conjuntos LIs, então a união deles $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_n$ também é LI.*

Prova: Vamos provar por indução em n. Para $n = 1$ é imediato. Suponha verdade para $n = p$. Vamos provar para $n = p+1$. Sejam $\beta_{p+1} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ e $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_p = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$. Suponha que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{v}_j = 0. \tag{7.1}$$

Queremos mostrar que $a_i = b_j = 0$ para todo i, j. Aplicando A em (7.1) obtemos que

$$\lambda_{p+1} \sum_i a_i \mathbf{u}_i + \sum_j \mu_j b_j \mathbf{v}_j = 0, \text{ com } \mu_j = \lambda_m, \ 1 \le m \le p. \tag{7.2}$$

• Se $\lambda_{p+1} \neq 0$, $\sum_i a_i \mathbf{u}_i = -\sum_j \frac{\mu_j}{\lambda_{p+1}} b_j \mathbf{v}_j$. Substituindo em (7.1) obtemos

$$\sum_j -\frac{\mu_j}{\lambda_{p+1}} b_j \mathbf{v}_j + \sum_j b_j \mathbf{v}_j = 0 = \sum_j \left(1 - \frac{\mu_j}{\lambda_{p+1}}\right) b_j \mathbf{v}_j = 0.$$

Como por hipótese de indução $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_p = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ é LI, $(1 - \frac{\mu_j}{\lambda_{p+1}}) b_j = 0$ para todo j. Como $\mu_j \neq \lambda_{p+1}$ (autovalores distintos), $(1 - \frac{\mu_j}{\lambda_{p+1}}) \neq 0$. Logo $b_j = 0$ para todo j.

• Se $\lambda_{p+1} = 0$, por (7.2), $\sum_j \mu_j b_j \mathbf{v}_j = 0$. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ é LI, $\mu_j b_j = 0$ para todo j. Como $\mu_j \neq 0$ (porque?), $b_j = 0$ para todo j.

Nos dois casos, substituindo $b_j = 0$ em (7.1) concluímos que $\sum a_i \mathbf{u}_i = 0$. Como β_{p+1} é LI, concluímos que $a_i = 0$ para todo i. ■

Corolário 7.7 (autovetores são LIs) *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, ou seja, se $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ e $T\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, $k = 1, \ldots, p$, com λ_k's distintos, então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI.*

O próximo corolário apresenta uma condição suficiente (mas não necessária) para que uma matriz seja diagonalizável. A condição não é necessária pois uma matriz com todos autovalores iguais (por exemplo a identidade, que possui somente o autovalor 1) pode ser diagonalizada.

Corolário 7.8 (condição suficiente para matriz ser diagonalizável) *Se uma matriz A de dimensões $n \times n$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

Prova: Se existem n autovalores distintos, pelo Corolário 7.7 eles são LIs. Definindo P uma matriz com os n autovetores, como eles são LIs, pelo Teorema 6.11 da p.177 a matriz P é invertível. Como são autovetores temos que $AP = PD$ (ver Observação 7.4 da p.201). Logo A é diagonalizável. ■

Corolário 7.9 (caracterização das matrizes diaginalizáveis) *Considere A uma matriz $n \times n$. A matriz A é diagonalizável se, e somente se, a soma das dimensões dos autoespaços associados a cada autovalor de A é n.*

Prova: Suponha que a soma das dimensões é n. Tome P uma matriz cujas colunas são vetores das bases dos autoespaços. Pelo Lema 7.6 da p.201 eles são LIs e são n vetores. Pelo Teorema 6.11 da p.177 a matriz P é invertível. Como são autovetores temos que $AP = PD$ (ver Observação 7.4 da p.201). Logo A é diagonalizável.

Se A é diagonalizável, $AP = PD$ e as colunas de P são autovetores. Como são n autovetores e P é invertível, são LIs. Assim segue que formam base de cada autoespaço. ■

Algoritmo para diagonalizar matriz A de dimensão n.

- Calcule os autovalores (raízes do polinômio característico).
- Encontre bases para autoespaços (resolver sistemas homogêneos).
- Junte os autovetores das bases dos autoespaços: se tivermos n autovetores LIs A é diagonalizável, caso contrário não é diagonalizável.

Exemplo 7.8 *Verifique se é diagonalizável. Se for determine decomposição espectral:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; *(b)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; *(d)* $T(x, y) = (x + y,\ y)$.

Solução: *(a) Calculamos autovalores e autoespaços no Exemplo 7.1 da p.196. É diagonalizável pois são dois autovalores distintos* (0 *e* 2) *e portanto dois autovetores LIs (pelo Corolário 7.7). Tomando* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 2 \end{bmatrix}$. *Observe que se trocarmos a ordem dos vetores obtemos uma matriz diagonal diferente. Assim se tomarmos* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Calculando $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2)$ *(utilize determinante por bloco). Note que vamos manter a fatoração (veja Observação 6.8 da p.180) pois queremos calcular raízes. Assim* $p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$. *Calculando raízes de* p *são* 2 *(do primeiro fator e do polinômio do segundo grau) e* 1.

Agora resolvendo o sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$ *obtemos como autovetores associados ao* 2: $(2, 0, 1)$ *e* $(-1, 1, 0)$. *Resolvendo* $(A - I)\mathbf{v} = 0$ *obtemos autovetor associado ao* 1 $(1, -2, 0)$. *Como são* 3 *autovetores LIs,* T *é diagonalizável. Seja* $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Então* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. *Observe que se trocarmos a ordem dos vetores obtemos uma matriz diagonal diferente. Assim se tomarmos* $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Calculamos autovalores e autoespaços no Exemplo 7.2 da p.197. Não é diagonalizável pois cada auto-espaço possui somente um vetor LI. Dois vetores não formam base do $\mathbb{R}^3$.

(d) A matriz associada a T *é* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *O polinômio característico é* $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. *Portanto o único autovalor é* 1. *Resolvendo* $(A - I)\mathbf{v} = 0$ *obtemos* $y = 0$. *Portanto a única direção preservada é* $(1, 0)$. *Como os autovetores não formam base, esta TL* ***não*** *é diagonalizável. Está transformação é um cisalhamento, representado na Figura 7.1 da p.199.*

■

Observação 7.5 (Software Algébrico) *Veja como utilizar o* `Maxima` *para calcular a decomposição espectral no Apêndice B.15 da p.247.*

Podemos calcular os autovalores e autoespaços e a decomposição espectral de transformações geométricas somente por geometria.

Exemplo 7.9 *Considere T uma projeção ortogonal na reta $r = \langle \mathbf{w} \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Determine autovalores e autovetores e sua decomposição espectral.*

Solução: *Considere $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ uma direção perpendicular à reta r. É claro que $T\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. Logo são autovalores 0 e 1 com autovetores associados $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$. Como são 2 autovetores LIs em $\mathbb{R}^2$, é diagonalizável.*

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então* $AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{v} & A\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{0} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. *Logo* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. *Observe que se* $Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w} & \mathbf{v} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então* $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 7.10 *Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\Pi = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ seja um plano em $\mathbb{R}^3$. Determine autovalores e autovetores e, se possível a decomposição espectral de:*

(a) S uma projeção ortogonal no plano Π.

(b) T uma reflexão ortogonal no plano Π.

(c) R uma rotação em torno do eixo $r = \langle \mathbf{w} \rangle$ por um ângulo 27^o.

Solução: *(a) Considere $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ uma direção perpendicular ao plano Π. É claro que $S\mathbf{u} = \mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, $S\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ e $S\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. Logo são autovalores: 0 com autovetor $\mathbf{u}$ e 1 com autovetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. São 3 autovetores LIs em $\mathbb{R}^3$: é diagonalizável.*

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então*

$$SP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S\mathbf{u} & S\mathbf{v} & S\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{0} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $P^{-1}SP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Considere $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ uma direção perpendicular ao plano Π. É claro que $T\mathbf{u} = -1\mathbf{u}$, $T\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$. Logo são autovalores: -1 com autovetor $\mathbf{u}$ e 1 com autovetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. São 3 autovetores LIs em $\mathbb{R}^3$: é diagonalizável.

Defina $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, *então*

$$TP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T\mathbf{u} & T\mathbf{v} & T\mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ -\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $P^{-1}TP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Considere $\Pi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o plano perpendicular ao eixo $r = \langle \mathbf{w} \rangle$. É claro que a única direção preservada será $\mathbf{w}$, quando $T\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Qualquer outra direção será modificada. Logo único autovalor (real) é 1 com autoespaço $\langle \mathbf{w} \rangle$: não é diagonalizável. ■

Deixamos para o leitor outros exemplos: projeção ortogonal em reta no espaço, reflexão em uma reta no plano, reflexão em plano no espaço.

Finalizamos esta seção apresentando o Teorema Espectral para matrizes simétricas (ver Definição 4.40 da p.115). Ele é utilizado em diversas aplicações pois permite garantir (sem precisar calcular autovalores e autovetores) que uma matriz é diagonalizável. É utilizado para:

- classificação de máximos e mínimos locais de função de várias variáveis através do estudo de sinais dos autovalores da chamada matriz Hessiana;
- classificação de cônicas e quádricas;
- estudo de mecânica de corpos rígidos.

Teorema 7.10 (espectral para matrizes simétricas) *Se a matriz quadrada A é simétrica ($A = A^T$: Definição 4.40 da p.115), então A é diagonalizável com P ortogonal ($P^TP = I$: Definição 4.41 da p.115).*

Prova: Vamos provar somente que **todos** autovalores são reais. Seja $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) um autovetor com autovalor associado $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Podemos escrever que $\lambda = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Logo $A\mathbf{w} = A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w} = (a+bi)(\mathbf{u}+i\mathbf{v})$. Separando partes reais e imaginárias obtemos $A\mathbf{u} = a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v} = b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$. Tomando produto escalar com $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ com cada equação obtemos: $\langle A\mathbf{u} \,|\mathbf{v}\rangle = a\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle - b\|\mathbf{v}\|^2$, $\langle A\mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle = a\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle + b\|\mathbf{u}\|^2$. Como A é simétrica, $\langle A\mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = \langle A\mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle$ (isto é verdade para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, e é a definição "correta" de matriz simétrica; pode-se verificar tomando $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ como vetores da base canônica e utilizando (bi)linearidade do produto interno). Portanto, $a\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle - b\|\mathbf{v}\|^2 = a\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle + b\|\mathbf{u}\|^2$. Pela simetria ($\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle$), $2b(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) = 0$. Como $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $b = 0$. Logo $\lambda = a \in \mathbb{R}$.

Para finalizar veja [7]. ∎

Exemplo 7.11 *São diagonalizáveis:* $\begin{bmatrix} k_1 & a & b \\ a & k_2 & c \\ b & c & k_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$.

7.3 Aplicações

Como calcular potências de uma matriz e $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$?

Convidamos o leitor a verificar que se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (diagonal), então $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora vamos determinar uma fórmula para A^k quando A é diagonalizável. Se A é diagonalizável, existe P invertível e D diagonal com $A = PDP^{-1}$. Assim:

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \quad \text{e}$$

$A^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDDP^{-1} = PD^3P^{-1}$.

De forma geral, $A^k = PD^kP^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 7.12 (potências de matrizes) *Calcule* A^{10^4} *para* $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: *É claro que* ***não*** *vamos multiplicar* A *por ela mesmo* $10,000$ *vezes! O polinômio característico é* $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda/2 - 1/2$. *As raízes (os autovalores) são* 1 *e* $-1/2$. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.*

O autoespaço associado ao $-1/2$ *é* $\langle(1,1)\rangle$. *O autoespaço associado ao* 1 *é* $\langle(1,-1)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *com* $D = \begin{bmatrix} -1/2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de* P *determinamos que* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Como* $D^{10^4} = \begin{bmatrix} 1/2^{10^4} & \\ & 1 \end{bmatrix}$, *calculando o produto* $PD^{10^4}P^{-1}$ *obtemos que* $A^{10^4} = \frac{1}{2^{10^4+1}}\begin{bmatrix} 2^{10^4}+1 & 1-2^{10^4} \\ 1-2^{10^4} & 2^{10^4}+1 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 7.13 (limite de sequência de matrizes) *Considere* $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -17/3 \end{bmatrix}$. *Calcule* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

Solução: *O polinômio característico é* $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda/3 + 1/3$. *As raízes (os autovalores) são* 1 *e* $1/3$. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.*

O autoespaço associado ao 1 *é* $\langle(2,-3)\rangle$. *O autoespaço associado ao* $1/3$ *é* $\langle(-3,5)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ *com* $D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/3 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de* P *determinamos que* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

É claro que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \lim\limits_{k\to\infty}(PD^kP^{-1}) = P\left(\lim\limits_{k\to\infty} D^k\right)P^{-1}$.

Como $D^k = \begin{bmatrix} 1^k & \\ & (1/2)^k \end{bmatrix}$, *o primeiro elemento da diagonal é sempre* 1 *e o segundo converge para zero. Logo,* $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$. *Concluímos que o limite é* $P\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$, *obtendo que* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -15 & -9 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 7.14 (estado limite) *Considere a matriz* $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Dado um vetor qualquer inicial* $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, *definimos* $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$. *Para qual vetor o sistema vai convergir (e se vai convergir)? A convergência depende do vetor inicial?*

Solução: *É claro que (por indução)* $\mathbf{v}_k = A^k\mathbf{v}_0$. *Assim queremos calcular* $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$. *Vamos seguir os passos do exemplo anterior.*

Como a matriz é triangular, os autovalores são $1/2$ *e* 1. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços. O autoespaço associado ao* $1/2$ *é* $\langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle$. *O autoespaço associado ao* 1 *é* $\langle(1,1,0)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *com*

$D = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de P determinamos que*

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $D^k = \begin{bmatrix} (1/2)^k & & \\ & (1/2)^k & \\ & & 1^k \end{bmatrix}$, *o terceiro elemento da diagonal é sempre* 1 *e o primeiro e o segundo convergem para zero. Logo,* $\lim_{k\to\infty} D^k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. *Concluímos que o limite é* $P \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$, *obtendo que* $\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Assim se* $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}_k = \lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} b-c \\ b-c \\ 0 \end{bmatrix}$. *Concluímos que o limite depende do estado inicial.* ■

Como calcular raiz quadrada de matriz diagonalizável?

Se $A = PDP^{-1}$ com elementos da diagonal de D (autovalores) positivos, definimos $B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$, onde $\sqrt{D}$ significa tomar raiz (positiva) dos elementos da diagonal. Desta forma, $B^2 = (P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = P(\sqrt{D})^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$ pois é claro que $\left(\sqrt{D}\right)^2 = D$.

Exemplo 7.15 (raíz quadrada de matriz) *Calcule* $\sqrt{A}$ *para* $A = \begin{bmatrix} -6 & -30 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}$.

Solução: *O polinômio característico é* $p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$. *As raízes (os autovalores) são* 4 *e* 9. *Resolvendo os sistemas associados, determinamos os autoespaços.*

O autoespaço associado ao 9 *é* $\langle(-2,1)\rangle$. *O autoespaço associado ao* 4 *é* $\langle(-3,1)\rangle$. *Portanto,* $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *com* $D = \begin{bmatrix} 9 & \\ & 4 \end{bmatrix}$. *Calculando a inversa de P determinamos que* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Como* $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$, *calculando o produto* $P\sqrt{D}P^{-1} = \sqrt{A}$ *obtemos que* $B = \sqrt{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. *Verifique diretamente que* $B^2 = A$.

Note que poderíamos ter tomado, ao invés de $\sqrt{D}$ *uma das opções:* $\begin{bmatrix} -3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\begin{bmatrix} 3 & \\ & -2 \end{bmatrix}$ *ou* $\begin{bmatrix} -3 & \\ & -2 \end{bmatrix}$, *pois o quadrado de qualquer uma delas é igual a D. Nestes casos obteríamos matrizes* $B_1 = \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -12 & -30 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} = -B_1$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = -B_1$. *Para qualquer uma delas,* $B_i^2 = A$. ■

Observação 7.6 *Pode-se de forma similar definir exponencial, seno, cosseno, etc. de uma matriz diagonalizável. De forma mais geral, se a matriz A for diagonalizável ($A = PDP^{-1}$) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função podemos definir $f(A) = Pf(D)P^{-1}$ onde $f(D)$ é aplicar a função em cada elemento da diagonal.*

Classificação de Formas Quadráticas

Dada função (chamamos de forma quadrática) $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ queremos saber se:

(a) $f(x, y) > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ não-nulo: **positivo definida**;

(b) $f(x, y) < 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ não-nulo: **negativo definida**;

(c) $f(x, y)$ pode ser positivo ou negativo dependendo de $x, y \in \mathbb{R}$: **indefinida**.

Classificação similar é feita para $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$.

Exemplo 7.16 (classificação de formas quadráticas) *Classifique as formas quadráticas abaixo em positivo definida, negativo definida ou indefinida:*

(a) $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2$; *(b)* $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2$;

(c) $f(x, y) = -4x^2 + 2xy - 4y^2$; *(d)* $f(x, y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$.

Solução: *(a) Podemos escrever* $f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Calculando autovalores encontramos 5 *e* -1. *Diagonalizando* A *(ela é simétrica e pelo Teorema 7.10 da p.205 é sempre diagonalizável),* $A = P^T DP$. *Logo* $f(v) = v^T P^T DPv$. *Defina* $w = Pv \implies w^T = v^T P^T$. *Logo* $f(w) = w^T Dw$. *Portanto se* $w = (a, b)$, $f(w) = f(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 5a^2 - 1b^2$. *a forma quadrática é indefinida, pois pode ser positiva ou negativa.*

(b) Podemos escrever $f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Calculando autovalores encontramos* 1 *e* 5. *Fazendo análise similar ao item anterior concluímos que a forma quadrática é positivo definida.*

(c) Podemos escrever $f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Calculando autovalores encontramos* -3 *e* -5. *Fazendo análise similar ao item anterior concluímos que a forma quadrática é negativo definida.*

(d) Podemos escrever $f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Calculando autovalores encontramos* -1 *e* 7. *Fazendo análise similar ao item anterior concluímos que a forma quadrática é indefinida.* ■

As matrizes que representam as formas quadráticas também são classificadas do mesmo modo.

Definição 7.11 *Se A é uma matriz simétrica ($A = A^T$), então dizemos que A é* ***positivo (negativo) definida*** *se TODOS os autovalores são positivos (negativos).*

Se alguns forem positivos e outros negativos dizemos que A é ***indefinida****.*

7.4 Exercícios de Autovetores e Diagonalização

7.4.1 Exercícios de Fixação

Autovalores e Autovetores

Fix 7.1: Considere $T(x,y) = (-3x+4y,\ 2y-x)$. É autovetor de T:
(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$? (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$? (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$? (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Fix 7.2: Determine se $\mathbf{v}$ é autovetor de A. Em caso positivo, determine o autovalor:
(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Fix 7.3: Considere o vetor $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$. Determine se é Verdadeiro ou Falso:
(a) como $T(\mathbf{0}) = 0\cdot\mathbf{0}$, o número 0 é autovalor de T;
(b) como $T(\mathbf{0}) = \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$, o vetor $\mathbf{0}$ é autovetor de T.
(c) toda TL possui pelo menos um autovalor real;
(d) se uma TL possui núcleo diferente de $\mathbf{0}$, então possui um autovalor.
(e) se o espectro de uma TL é $\{2,3,-1\}$, então é invertível.

Fix 7.4: Se $T:\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}^9$, T possui no máximo _____ autovalores distintos.

Fix 7.5: Se $\mathbf{u}$ é autovetor associado ao autovalor 2 e $\mathbf{v}$ é autovetor associado ao autovalor 3:
(a) $\mathbf{y} = -\mathbf{u}$ é autovetor associado ao autovalor __$(-2,2,-3,3)$;
(b) $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}$ é autovetor associado ao autovalor __$(2,3,4,6)$.
(c) $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ __(*é, não é*) autovetor associado ao autovalor 5;

Fix 7.6: Se o único autovalor de $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ é 5, então (responda com $>$ ou $= 0,1,2,3$):
(a) $\dim\operatorname{Nuc}(T-3I)$ __; (b) $\dim\operatorname{Nuc}(T+5I)$ __; (c) $\dim\operatorname{Nuc}(T-5I)$ __;

Fix 7.7: Se a matriz quadrada B não possui inversa, então 0 _____(*não*) é autovalor de B.

Fix 7.8: Considere em $\mathbb{R}^2$: R uma reflexão, P uma projeção ortogonal e U uma rotação por ângulo θ $(0<\theta<\pi)$. Determine quais possuem um autovalor igual a:
(a) 1: _____; (b) -1: _____; (c) 0: _____; (d) um complexo não-real:_____.

Fix 7.9: Se $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ possui como polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(T-\lambda I) = (\lambda-1)(\lambda+3)(2-\lambda),$$

(a) $n =$ __; (b) $\dim(\operatorname{Nuc}(T)) =$ __; (c) $\dim(\operatorname{Nuc}(T-3I)) =$ __.

Diagonalização

Fix 7.10: Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(a) é(são) autovalor(es) _____; (b) são autovetores _____; (c) A _____ diagonalizável.

Fix 7.11: Determine se Verdadeiro ou Falso. Se $T:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^6$ possui:
(a) 6 autovalores distintos, então T é diagonalizável.
(b) 2 autovalores distintos, então T não é diagonalizável.
(c) 4 autovalores distintos, todos autoespaços com dimensão 1, então T não é diagonalizável.

[1]Versão 03.out.2012 11h

Fix 7.12: Se todo autovetor de A é múltiplo de $(1,1,1)$, A ___(*é, não é, pode ser*) diagonalizável;

Fix 7.13: Se $B = \begin{bmatrix} -1 & \pi & e \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então

(a) seus autovalores são __________;

(b) B ________(*pode, não pode*) ser diagonalizada pois seus autovalores são __________.

Fix 7.14: Determine em cada caso se a TL pode ser diagonalizada:

(a) $A_{4\times 4}$ tem três autovalores distintos. Um autoespaço é unidimensional e um dos outros é bidimensional.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tem polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - \pi)(\lambda - e)^2(\lambda - 1)^3$. Dois dos autoespaços de T são bidimensionais, o outro unidimensional.

Fix 7.15: A matriz abaixo está fatorada na forma MDM^{-1}. **Sem fazer contas**, determine os autovalores da matriz e bases para cada um dos autoespaços.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7.4.2 Problemas

Autovalores e Autovetores

Prob 7.1: Sabe-se que $\lambda = 10$ é autovalor para $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. Determine uma base para o autoespaço associado. Determine três autovetores distintos.

Prob 7.2: Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $T(x, y, z) = (-x - 2y + 2z,\ y,\ z)$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prob 7.3: Determine h na matriz $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de modo que o autoespaço associado ao autovalor 5 seja bidimensional.

Prob 7.4: Em cada item dê um exemplo de TL que tenha:

(a) $(1, -2)$ e $(0, 1)$ como autovetores associados aos autovalores $-1/2$ e 2 respectivamente;

(b) $(1, -1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ como autovetores associados ao autovalor 3 e $(0, 1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

Prob 7.5: Explique em cada caso porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja uma reta e tenha dois autovalores reais distintos não-nulos;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que seja sobrejetiva com um autovalor igual a 0;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(5, 7, 9)$ (note que o terceiro é soma dos dois primeiros) como autovetores associados aos autovalores 1, 2 e 3;

Prob 7.6: Determine os autovalores e a dimensão de $\mathrm{Nuc}(T)$, $\mathrm{Nuc}(T+I)$, $\mathrm{Nuc}(T-I)$ se:
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal num plano passando pela origem;
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão em torno de um plano passando pela origem;

Prob 7.7: Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possui $x - y + z = 0$ como autoespaço associado ao autovalor 2:
(a) $T(1,2,1) =$ _____; (b) $\dim(\mathrm{Nuc}(T))$ pode ser no máximo __ (*0, 1, 2, 3*).

Prob 7.8: Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma rotação em torno de um eixo fixo, determine a direção do eixo de rotação.

Prob 7.9: Calcule autovalores e autovetores para determinar se $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é reflexão ou projeção. Determine em torno do que (plano ou reta) se dá a reflexão ou projeção.

Prob 7.10: Considere $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Determine autovalor associado a:
(a) $f(s) = \exp(-9s)$ se $Tf = f'$; (b) $f(s) = \cos(3s)$ se $Tf = f'$.

Diagonalização

Prob 7.11: Se possível, diagonalize a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Prob 7.12: Considere $A(x,y,z) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z)$. Determine P e Q tais que:
(a) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prob 7.13: Determine a decomposição espectral de T se:
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal no plano $x - 2y - z = 0$;
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma projeção ortogonal em $H = \langle (1,2,3,4), (2,3,4,5) \rangle$.

Prob 7.14: Sabe-se que $T(1,\ 1,\ -1) = 3(1,\ 1,\ -1)$, $T(1,\ 0,\ 1) = 3(1,\ 0,\ 1)$ e $T\mathbf{w} = \mathbf{w}$, com $\mathbf{w}$ ortogonal a $(1,\ 1,\ -1)$ e $(1,\ 0,\ 1)$. Determine P ortogonal tal que $PTP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Aplicações

Prob 7.15: Calcule:
(a) A^{10} para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^k$;

(c) [2] $\sqrt{A}$ para $A = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{bmatrix}$ (isto é, determine B tal que $B^2 = A$);

(d) X e Y tais $A^{99} = XYX^{-1}$ (não efetue o produto) se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

[2] Veja [12] p.272, #3.

Prob 7.16: Num país politicamente instável 30% dos defensores da república passam a apoiar a monarquia a cada ano e 20% dos defensores da monarquia passa a apoiar a república a cada ano. Portanto, denotando por r_k e m_k o número de republicanos e monarquistas, respectivamente, a cada ano k, temos que $r_{k+1} = 70\% r_k + 20\% m_k$ e $m_{k+1} = 30\% r_k + 80\% m_k$. Utilizando matrizes,

$$\begin{bmatrix} r_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ m_k \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$.

(b) Sabendo que hoje metade da população apóia a república, em 10 anos qual será o percentual que apóia a república?

(c) A longo prazo qual será o percentual de republicanos e monarquistas? Note que isto independe do percentual inicial.

7.4.3 Extras

Autovalores e Autovetores

Ext 7.1: Se $\dim \operatorname{Nuc}(T + 2I) = 1$, então é autovalor de T:

(a) 2? _____(*sim, não, talvez*); (b) -2? _____(*sim, não, talvez*).

Ext 7.2: Calcule os autovalores e autoespaços associados de:

(a) $T(x, y) = (x - y,\ 2x + 3y)$; (b) $T(x, y, z) = (x - 2y,\ -y,\ -y)$;

(c) uma reflexão no plano $3x - 2y + z = 0$ em $\mathbb{R}^3$;

(d) uma projeção ortogonal numa reta em $\mathbb{R}^3$ com $P(1,\ -1,\ 0) = (1,\ -1,\ 0)$.

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;[3]

(h) $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma projeção ortogonal na reta gerada por $(1, 2, -1, 1)$;

(i) $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação por ângulo de $90°$ em torno do eixo gerado por $(1, 1, -1)$.

Ext 7.3: O traço(A) é a soma dos elementos da diagonal da matriz A. Prove que:

(a) o polinômio característico de A 2×2 é $\lambda^2 -$ traço$(A)\lambda + \det(A)$ onde

(b) $(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$; (c) os autovalores de A são iguais aos de A^T.

Ext 7.4: Determine $\det(A)$ se o polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^6 + 3\lambda^2 + 4$.

Ext 7.5: Em cada item dê um exemplo de TL:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 1 e -1 como autovalores;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 2 e 3 como autovalores associados respectivamente aos autoespaços $x = y$ e $x = -y$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $x - y + z = 0$ como autoespaço associado ao autovalor 2 e que tenha também -1 como autovalor;

Ext 7.6: Explique em cada caso abaixo porque não existe uma TL:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja o plano gerado por $(0, 1, -1, 1)$ e $(1, 0, 0, 1)$ e que tenha $(1, -1, 1, 0)$ como autovetor associado ao autovalor -3;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $x - y + z = 0$ como autoespaço associado ao autovalor -1 e tal que $T(1, 0, 1) = (0, 1, 0)$;

Ext 7.7: Determine os autovalores e a dimensão de $\operatorname{Nuc}(T)$, $\operatorname{Nuc}(T + I)$, $\operatorname{Nuc}(T - I)$ se:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção ortogonal numa reta passando pela origem;

[3]Veja [12] p.117, #35.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma rotação de $180°$.

Ext 7.8: Determine se é rotação, reflexão ou projeção ortogonal e eixo de rotação ou plano de reflexão/projeção de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & 2 & \sqrt{3} \\ 2 & 4 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2\sqrt{3} \\ 4 & 0 & -4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ext 7.9: Suponha que λ é autovalor de A invertível e μ autovalor de B com mesmo autovetor $\mathbf{v}$. Determine autovalor associado ao autovetor $\mathbf{v}$ de:

(a) A^2; (b) A^{-1}; (c) AB; (d) $C = aA + bB$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Ext 7.10: Suponha que A é semelhante a B (veja Definição 4.55 da p.125).

(a) prove que $\det(A) = \det(B)$;

(b) prove que A^3 e B^3 também são semelhantes.

(c) prove que A e B possuem os mesmos autovalores;

(d) determine a relação entre os autovetores $\mathbf{v}$ de A e $\mathbf{w}$ de B (que são distintos de forma geral).

(e) prove que traço(A) = traço(B) (Veja definição no Ext 7.3 da p.212).

Ext 7.11: Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam autovetores. Defina $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ com $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha ainda que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão associados:

(a) ao mesmo autovalor λ. Prove que $\mathbf{w}$ é autovetor associado a λ;

(b) a autovalores distintos. Prove $\mathbf{w}$ não é autovetor.

Ext 7.12: Se $A = A^5$, então autovalores reais de A somente podem ser _____.

Ext 7.13: (a) Seja $A_{n\times n}$ tal que as somas das entradas de cada linha têm todas o mesmo valor s. Conclua que s é autovalor.

Dica: escreva " $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s, \quad i = 1, 2, \ldots, n$" **em forma matricial** e determine um autovetor.

(b) Determine dois autovalores de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **por inspeção** (sem fazer contas).

(c) Suponha que a soma de todos elementos de cada coluna é igual a k. Prove que k é autovalor de A.

Ext 7.14: Considere $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, definida por $Tf = f''$. Determine o autovalor associado a:

(a) e^{-x}; (b) $\operatorname{sen}(x)$; (c) $\cos(-3x)$.

Ext 7.15: Considere $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definido por $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$. Determine os autovalores e autoespaços de T.

Diagonalização

Ext 7.16: Sejam $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = PDP^{-1}$. Calcule A^8 (sem passar por A^2).

Ext 7.17: Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $A\mathbf{v}_k = k\mathbf{v}_k$, com $k = 1, \ldots, n$.

(a) Mostre que existe P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal;

(b) Determine esta matriz diagonal.

Ext 7.18: Se possível, diagonalize a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Ext 7.19: Determine matrizes X e Y de modo que $A = XYX^{-1}$ possua autovalores 2 e -3 com autovetores associados, respectivamente, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ext 7.20: Diagonalize, **sem fazer contas**, $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

Ext 7.21: Determine valores de a para que T seja diagonalizável:

(a) $T = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $T(x, y, z) = (3x + az,\ 2y + az,\ 2z)$

Ext 7.22: Diagonalizabilidade e invertibilidade são conceitos distintos. Para confirmar esta afirmação, construa uma matriz 2×2 que é:

(a) diagonalizável mas não é invertível; (b) invertível mas não é diagonalizável.

Ext 7.23: Calcule:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}^k$. (b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}^{100}$;

Ext 7.24: Em cada item dê um exemplo de TL satisfazendo as condições dadas.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha 2 como único autovalor e seja diagonalizável;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenha $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ como autovetores respectivamente associados aos autovalores -1 e 3 e seja diagonalizável.

Ext 7.25: Prove que se:

(a) P diagonaliza A, então $Q = \lambda P$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ não-nulo também diagonaliza A.

(b) A e B são diagonalizadas pela mesma matriz P, então $AB = BA$.

(c) [4] Prove que se todo vetor (não-nulo) de V é autovetor de T, então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

7.4.4 Desafios

Autovalores e Autovetores

Des 7.1: Considere $\mathbf{u}$ autovetor de A associado a λ e $\mathbf{v}$ autovetor de A^T associado a μ com $\lambda \neq \mu$. Prove que $\mathbf{u}$ é perpendicular a $\mathbf{v}$.

Des 7.2: Considere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $a + b = c + d$. Prove que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem somente autovalores inteiros.

Des 7.3: Determine o espectro de $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

Des 7.4: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Prove que $\det(T - \lambda I)$ é um polinômio de grau n.

Dica: multilinearidade do determinante.

[4] Veja [12] p.117, #31.

Des 7.5: Considere uma matriz quadrada A diagonalizável. Prove que:

(a) a soma dos autovalores de A é igual ao traço de A (a soma dos elementos da diagonal);

(b) o produto dos autovalores de A é igual ao determinante de A.

Des 7.6: Mesmo que T não possua autovetores, T^2 pode possuir autovetores (por exemplo uma rotação de $90°$). Mostre que se T^2 tem autovetor com autovalor positivo, então T possui autovetor.

Des 7.7: Mostre que se λ é autovalor de AB, então também é autovalor de BA.

Des 7.8: Seja $A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com $\dim \operatorname{Nuc}(A - \lambda I) = 4$. Mostre que existe uma matriz P inversível 7×7 tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda I_{4\times 4} & B_{4\times 3} \\ 0 & C_{3\times 3} \end{bmatrix}$.

Des 7.9: Considere T linear definido no espaço das matrizes 2×2 por $TA = A^T$. Determine os autovalores e autoespaços de T.

Des 7.10: Seja V o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Defina $(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\,ds$. Prove que T não possui autovalores. Se tivesse, $Tf = \lambda f$, derivando os dois lados, $\lambda f' = f$ e portanto f seria uma exponencial mas como $(Tf)(0) = \int_0^0 f(s)\,ds = 0$, $f \equiv 0$.

Diagonalização

Des 7.11: A famosa sequência de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., é dada pela lei de formação: um termo é a soma dos dois anteriores. Em termos matriciais, podemos escrever $\begin{bmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) a decomposição espectral de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) o quinquagésimo segundo termo da série.

(c) valor aproximado para x_{k+1}.

Des 7.12: Suponha N nilpotente (veja Definição 4.57 da p.131) isto é, $N^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Prove que:

(a) o único autovalor de N é zero; (b) se $N \neq 0$, então N não é diagonalizável.

Des 7.13: Suponha A diagonalizável. Prove que:

(a) A^T é diagonalizável;

(b) se os autovalores são iguais a 1 em módulo, então $A^{-1} = A$;

Des 7.14: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizável. Prove que:

(a) o único autovalor de T é λ_0 se, e somente se, $T - \lambda_0 I = 0$ (isto é, $T = \lambda_0 I$);

(b) se T possui dois autovalores distintos λ_0 e λ_1, então $(T - \lambda_0 I)(T - \lambda_1 I) = 0$.

Des 7.15: Prove que se A é 2×2 e $A = A^T$, então A (teorema espectral para matrizes 2×2):

(a) possui todos autovalores reais; (b) é diagonalizável.

Des 7.16: Dada A definimos $e^A = I + A + A^2/2! + \cdots A^n/n! + \cdots$ (esta soma infinita — chamamos de série — possui limite mas não vamos provar isso).

(a) prove que se A é diagonalizável, então $e^A = Pe^DP^{-1}$ onde e^D é diagonal com exponencial de cada elemento de D na diagonal;

(b) calcule e^A para $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(c) Se N é nilpotente, então e^N é uma série finita que pode ser calculada. Calcule e^N para $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) prove que e^A é invertível se A é diagonalizável;

(e) prove que se A é simétrica ($A = A^T$), então e^A é simétrica e positivo definida.

Des 7.17: Prove que se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ então A representa uma:

(a) rotação se $\det(A) = 1$; (a) reflexão se $\det(A) = -1$.

Observação: Este resultado é generalizado para $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$. Consulte internet.

Apêndice A

Respostas dos Exercícios

A.1 Introdução à Álgebra Linear

A.1.1 Exercícios de Fixação

Fix 1.1: Somente (b), (c) e (d).

Fix 1.2: (a) paralelos; (b) maior tamanho e mesmo sentido; (c) mesmo tamanho e sentido oposto; (d) maior tamanho e sentido oposto; (e) menor tamanho e sentido oposto;

Fix 1.3: (a) reta; (b) ponto; (c) plano; (d) reta; (e) plano; (f) ponto; (g) reta; (h) reta.

Fix 1.4: (a) $(-5/2,\ 0)$. (b) $(0,\ 5/3)$.

Fix 1.5: (a) $x = 3, y = t$ para $t \in \mathbb{R}$. (b) $x = t, y = -1$ para $t \in \mathbb{R}$.

Fix 1.6: Todos são CLs. (a) $(0,0) = 0(2,0) + 0(0,2)$. (b) $(1,0) = \frac{1}{2}(2,0)+0(0,2)$. (c) $(4,6) = 2(2,0) + 3(0,2)$.

Fix 1.7: (a) $x(2,1) + y(3,-1) = (5,2)$. (b) $(5,2) \in \langle(2,1),(3,-1)\rangle$.

Fix 1.8: (a)–(3); (b)–(1); (c)–(2).

Fix 1.9: (a)–(3); (b)–(2); (c)–(4); (d)–(1).

Fix 1.10: (a) reta; (b) plano; (c) reta; (d) ponto;

Fix 1.11: (a) não; (b) sim.

Fix 1.12: (a) V; (b) F;

Fix 1.13: (a) 2. (b) 3. (c) 1. (d) 2.

A.1.2 Problemas

Prob 1.1: (a) Queremos que $\mathbf{w} = t\mathbf{u}$. Portanto, $(1,0,2)+k(-1,2,0) = t(-1,3,1)$. Assim queremos que $(1-k, 2k, 2) = (-t, 3t, t)$. Logo precisamos resolver o sistema $\begin{cases} 1-k=-t \\ 2k=3t \\ 2=t \end{cases}$. Logo $t = 2$ (última equação), $k = 3$ (2a equação), e verificar que satisfazem 1a equação ($1-3 = -2!$). Logo $k = 3$. (b) De forma análoga precisamos resolver o sistema $\begin{cases} 1-k=-t \\ 2k=3t \\ 2=2t \end{cases}$. Logo $t = 1$ (última equação), $k = 3/2$ (2a equação), e verificar que não satisfazem 1a equação ($1-3/2 \neq -1!$). Assim é impossível e não existe k.

Prob 1.2: (a) $(x,y) = (t, 2t+5) = (0,5)+t(1,2)$ ou $(x,y) = ((s-5)/2, s) = (-5/2,0)+s(1/2,1)$; (b) $(x,y) = (t,-1) = (0,-1) + t(1,0)$;

Prob 1.3: (a) $\{x+2y+1 = 0\}$ (b) $\{5y-2x = 2\}$ (c) $\{y = -3\}$ (d) $\{x = 0\}$

Prob 1.4: (a) $x = t-1, y = -2t+1, z = t$; (b) $x = 1, y = 0, z = t$; (c) $x = t, y = t, z = 0$;

Prob 1.5: (a) $x = 2-t, y = -3+5t, z = -1+2t$; (b) $x = -1, y = 2, z = t$; (c) $x = 0, y = 1-t, z = t$;

Prob 1.6: (a) $\{x + 2y + 1 = 0; z + 3y = 2\}$ (b) $\{x = 2; y = -3\}$ (c) $\{x = -5z-6; y = -6z-4\}$ (d) $\{x = y; z = 0\}$

Prob 1.7: (a) Tome $s = z, t = y, x = -y + z + 2 = -t + s + 2$. Logo, $(x,y,z) = (2,0,0) + s(1,0,1)+t(-1,1,0)$; (b) $x = t$, $y = s$, $z = y = s$. Logo, $(x,y,z) = \mathbf{0} + t(1,0,0) + s(0,1,1)$.

Prob 1.8: (a) $z = x + 3y - 2$; (b) $y = 1$; (c) $z = x - 1 - 2y$; (d) $x = t$;

Prob 1.9: (a) Queremos determinar $s, t, u \in \mathbb{R}$ tais que
$(1,2,1)+s(1,0,1) = (2,0,0)+t(2,0,2)+u(1,0,0)$.
Vamos obter o sistema
$\begin{cases} 1+s=2+2t+u \\ 2=0 \\ 1+s=2t \end{cases}$, que não possui solução

[0] Versão 23.ago.2012 11h

$(2 = 0!)$. Logo a interseção é vazia.

(b) Como $r(t) = (1, 2, 1) + t(1, 0, 1) = (1 + t, 2, 1+t)$, e $x+z = 0$, $1+t+1+t = 0 = 2+2t$. Logo $t = -1$ e o ponto de intereção é $r(-1) = (1, 2, 1) + (-1)(1, 0, 1) = (0, 2, 0)$.

(c) Como $\Pi_1(s, t) = (2, 0, 0) + s(2, 0, 2) + t(1, 0, 0) = (2+2s+t, 0, 2s)$ e $x+z = 0$, $2+2s+t+2s = 0 = 4s+t+2$, fixado $s \in \mathbb{R}$, $t = -2-4s$. Logo a interseção é a reta $(2, 0, 0) + s(2, 0, 2) + (-2 - 4s)(1, 0, 0) = (2 + 2s - 2 - 4s, 0, 2s) = (-2s, 0, 2s) = s(-2, 0, 2)$. Pode escrever como $\langle(-2, 0, 2)\rangle$.

Prob 1.10: (a) $(1, 0, 1)+t(-1, 1, 0)+s(-2, 0, -1)$; (b) $(1, 3, 2) + t(-2, -1, -1) + s(1, -1, -1)$; (c) $(-3, 1, 0) + t(4, 0, -1) + s(1, -1, 1)$;

Prob 1.11: (a) tome $t = 0, 1$ e -1 por exemplo e obtenha $(1, 2, 0, 0)$, $(1, 5/2, 1, -1)$, $(1, 3/2, -1, 1)$; (b) sim ($t = 4$); (c) não; (d) não pois $(1, 4, 3, 2) \notin r$;
(e) sim pois $(1, 4, -4, 4) \in r$ ($t = -4$) e $(0, -2, -4, 4)$ é paralelo a $(0, 1/2, 1, -1)$.

Prob 1.12: (a) Coloque $s = 0, 1$ e $t = 0, 1$ alternadamente, obtendo 4 pontos: $(1, 1, 2, 0)$, $(0, 3, 1, 2)$, $(2, 2, 3, 1)$ e $(1, 4, 2, 3)$; (b) sim com $t = 1, s = 2$; (c) não; (d) não pois $(1, 1, 3, 3) \notin \Pi$. (e) Queremos $x = z = w = 0$. Assim (porque?) $1 - t + s = 2 - t + s = 2t + s = 0$. Como o sistema não possui solução, a interseção com o eixo y é vazia. (f) Agora usando parâmetros u, v, $x = u, y = 0, z = 0, w = v$. Assim devemos resolver o sistema (4 variáveis e 4 equações): $\begin{cases} 1 - t + s = u \\ 1 + 2t + s = 0 \\ 2 - t + s = 0 \\ 2t + s = v \end{cases}$. A solução única é: $s = -5/3, t = 1/3, u = -1, v = -1$. Assim a interseção é o ponto $(u, 0, 0, v) = (-1, 0, 0, -1)$. A interseção de dois planos em $\mathbb{R}^4$ pode ser um ponto.

Prob 1.13: (a) $(x, y, z, w) = (s - 3t + 2u + 4, s, t, u) = (4, 0, 0, 0)+s(1, 1, 0, 0)+t(-3, 0, 1, 0)+u(2, 0, 0, 1)$; (b) note que x, y, w podem assumir qualquer valor. Logo colocando $x = t, y = s, w = k$ e $u = m$, temos que $z = 3u + 5 = 3m + 5$. Portanto $(x, y, z, w, u) = (t, s, 3m + 5, k, m)$. Na forma fatorada, $(x, y, z, w, u) = (0, 0, 5, 0, 0) + t(1, 0, 0, 0, 0) + s(0, 1, 0, 0, 0) + m(0, 0, 3, 0, 1)+k(0, 0, 0, 1, 0)$. (c) $(x, y, z, w) = t(-2, 0, 1, 0) + s(0, 1, 0, 1)$.

Prob 1.14: (a) sim pois um não é múltiplo do outro;
(b) não pois $-3(-1, 2, 1, -3) = (3, -6, -3, 9)$;
(c) não pois, embora nenhum seja múltiplo de outro, $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$;
(d) não pois $(0, 0, 0, 0, 0) = 0(1, 2, 3, 4, 5)$.

Prob 1.15: (a) não pois não é múltiplo; (b) sim pois $(-1, 0, 0) = (2, 1, 1) - (3, 1, 1)$; (c) não pois vai aparecer um sistema sem solução; (d) sim pois $(a, b, c) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) + (c - a)(0, 0, 1)$; (e) não pois $(2, 1, 2)$ não é múltiplo de $(2, -1, 2)$.

A.1.3 Extras

Ext 1.1: (a) F; (b) V;

Ext 1.2: (a) $(x, y) = (3, t) = (3, 0) + t(0, 1)$ ou $(x, y) = (3, 2s) = (3, 0) + s(0, 2)$. (b) $x = -t + 1, y = t, z = t - 1/5$; (c) $y = t, z = s$, $x = 1 + 2y = 1 + 2t$. Logo $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 2, 0) + s(0, 0, 1)$; (d) $x = t, y = s, z = (3t - 5)/2$;

Ext 1.3: (a) reta; (b) plano; (c) plano; (d) plano; (e) ponto; (f) reta.

Ext 1.4: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ -3x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$.

A.1.4 Desafios

Des 1.1: Estas ideias estão descritas num romance clássico da era vitoriana da Inglaterra do século XIX: "Flatland"; Edwin A. Abbott; Dover Pub.

(a) $C \subset \mathbb{R}^3$ definido por $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ |x| \le 1, |y| \le 1\}$, um quadrado no plano xy em $\mathbb{R}^3$.

(b) Defina $c(t) = t(0, 0, 0, 1)$ para $t \in [0, 1]$ que sairemos do cubo numa direção perpendicular. Depois $c(t) = (0, 0, 0, 1) + (t - 1)(2, 0, 0, 0)$ para $t \in [1, 2]$ e
$c(t) = (2, 0, 0, 1) + (t - 2)(0, 0, 0, -1)$ para $t \in [2, 3]$ que terminaremos em $(2, 0, 0, 0, 0)$, fora do cubo.

A.2 Sistemas Lineares

A.2.1 Exercícios de Fixação

Fix 2.1: (a) infinitas; (b) uma única; (c) nenhuma.

[1]Versão 10.out.2012 09h

Fix 2.2: Nunca alteram: (a), (d) e (e); podem alterar (b), (c) e (f).

Fix 2.3: $2x + 3y = -2$.

Fix 2.4: (a) Nenhuma; (b) uma única. (c) infinitas.

Fix 2.5: (a) C; (b) nenhuma solução; (c) nenhuma solução; (d) A.

Fix 2.6: (a) ∞; (b) 0; (c) 1; (d) 1; (e) 0.

Fix 2.7: Basta que uma linha seja múltipla da outra. (a)$\xi \neq -6$; (b) nenhum valor de ξ satisfaz.

Fix 2.8: (a) falso. Pode ser, por exemplo, um sistema sem solução pois uma das equações restantes pode ser $0 = 1$. (b) verdadeiro, a solução nula; (c) falso. (d) falso; (e) falso, pode ser sem solução; (f) verdadeiro; (g) verdadeiro (pode possuir até 9); (h) falso, pode possuir equações que são combinações lineares de outras.

Fix 2.9: (a) O sistema linear tem solução única; (b) O sistema linear é sem solução (conjunto-solução é vazio), pois há uma linha da forma $[\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \blacksquare\ ]$; (c) O sistema linear com infinitas soluções. Há 3 variáveis e 2 pivôs, logo o número de variáveis livres é $3 - 2 = 1$ variável livre.

Fix 2.10: (a) $\mathrm{Nuc}(B)$. (b) não será.

Fix 2.11: (a) interseção de hiperplanos; (b) 1; (c) 2; (d) 4;

Fix 2.12: (a) $\neq \emptyset$; (b) $\in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$.

Fix 2.13: $S = \mathbf{v}_0 + V$ com $\mathbf{v}_0 \in S$.

A.2.2 Problemas

Prob 2.1: (a) solução única: retas concorrentes em $(2, 1)$; (b) nenhuma solução: retas paralelas distintas;

Prob 2.2: Existem várias possibilidades para cada item.

Prob 2.3: (a)$\{0x = 0$; (b)Impossível, pois $p < n$; (c)$\{0x + 0y = 1$; (d)$\left\{\begin{array}{lcl} 0x & = & 0 \\ 0x & = & 0 \end{array}\right.$;

Prob 2.4: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prob 2.5: (a) Sistema sem solução.
(b) $\{(1, 0, 0, 0)r + (0, 2, 1, 0)s \mid r, s \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{(-1, 3, 2)\}$;
(d) $\{(\frac{4}{3}, 1, 0)r + (-\frac{2}{3}, 0, 1)s \mid r, s \in \mathbb{R}\}$;
(e) $\{(6, 0, -2, -2) + (-3, 1, 0, 0)r \mid r \in \mathbb{R}\}$.
(f) Matriz totalmente escalonada:
$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$; O sistema linear tem solução, já que não há linha da forma $[\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \blacksquare\ ]$. A solução não é única: há duas variáveis livres, já que há cinco variáveis e só três pivôs, conj solução: $\{(0, 2, 0, 1, 3) + r(1, 0, 0, 0, 0) +$
$+ s(0, -2, 1, 0, 0)\ r, s \in \mathbb{R}\}$.

Prob 2.6: Por definição, sistemas equivalentes têm o mesmo conjunto solução. O conjunto é: $\{s(2, 2, 1, 0, 0) + t(24, 7, 0, 1, 0), \quad s, t \in \mathbb{R}\}$; (b) Fazendo, por exemplo, $(s, t) = (0, 0)$, $(s, t) = (0, 1)$ e $(s, t) = (1, 0)$ obtemos as soluções: $(1, 3, 0, 0, 9)$, $(25, 10, 0, 1, 9)$ e $(3, 5, 1, 0, 9)$.

Prob 2.7:

(a)$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & \frac{1}{2} & + & 1r & + & (-2)s \\ y & = & 0 & + & 1r & + & 0s \\ z & = & 0 & + & 0r & + & 1s \end{array}\right.$;

(b)$\left\{\begin{array}{ccl} x & = & r - 1 \\ y & = & r - 1 \qquad r \in \mathbb{R}. \\ z & = & r \end{array}\right.$

Prob 2.8: (a) $m \neq 4$; (b)$m = 4$.

Prob 2.9: (a) $c = 0$ e $d \neq 0$; (b) $c = 0$ e $d = 0$.

Prob 2.10: Parametrizando, $V = (1, 2, 3, 4, 5) + r(1, 0, 1, 0, 1) + s(0, 1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1, 1)$, com $r, s, t \in \mathbb{R}$. Assim, $V = (1 + r,\ 2 + s,\ 3 + r + s,\ 4 + t,\ 5 + r + t)$.

(a) $W = u(1, 0, 0, 0, 0) + v(0, 0, 0, 0, 1)$, $u, v \in \mathbb{R}$. Logo $W = (u, 0, 0, 0, v)$. Queremos saber se existem $r, s, t, u, v \in \mathbb{R}$ tais que $V = (1 + r,\ 2 + s,\ 3 + r + s,\ 4 + t,\ 5 + r + t) = W = (u, 0, 0, 0, v)$. Precisamos resolver o sistema (4 equações, 3 variáveis):

$$\left\{\begin{array}{r} r - u = -1 \\ s = -2 \\ r + s = -3 \\ t = -4 \\ r + t - v = -5 \end{array}\right. \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Matriz ampliada: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Assim solução do sistema é $r = -1$, $s = -2$, $t = -4$, $u = v = 0$. O ponto de interseção **não** é $(-1, -2, -4, 0, 0)$! Obtemos $V \cap W$ substituindo os parâmetros na parametrização de V ou de W. Em ambos os casos (verifique) obtemos $\mathbf{0}$. Assim $V \cap W = \mathbf{0}$.

(b) Substituindo a parametrização de V (veja antes da solução de (a)) nas equações do sistema que caracteriza Z obtemos:

Assim, $V = (1 + r,\ 2 + s,\ 3 + r + s,\ 4 + t,\ 5 + r + t)$.

$\begin{cases} (1 + r) - (3 + r + s) = 1 \\ (2 + s) + (4 + t) + (5 + r + t) = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -s = 3 \\ s + 2t + r = -11 \end{cases}$. São 2 equações e 3 variáveis. Assim temos uma variável livre. Tomando t como parâmetro, $s = -3$, $r = -11 - 2t + 3 = -8 - 2t$. Obtemos $V \cap Z$ substituindo os parâmetros na parametrização de V: $V \cap Z = (1-8-2t,\ 2-3,\ 3-8-2t-3,\ 4+t,\ 5-8-2t+t)$. Assim $V \cap Z = (-7 - 2t,\ -1,\ -8 - 2t,\ 4 + t,\ -3-t)$. Em termos de espaço gerado, $V \cap Z = (-7,\ -1,\ -8,\ 4,\ -3) + \langle(-2,\ 0,\ -2,\ 1,\ -1)\rangle$, uma reta.

(c) Pontos na interseção vão satisfazer os dois sistemas **simultaneamente**. Assim temos que resolver o sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + w + k = 0 \\ x + w = 1 \\ z - x + y + w + k = -1 \end{cases}$.

Resolvendo (`linsolve([x-z=1,y+w+k=0,x+w=1, z-x+y+w+k=-1],[x,y,z,w,k]);` no `Maxima`!) obtemos que uma equação pode ser eliminada e a solução (parametrizada por $r, t \in \mathbb{R}$) é: $x = 1 - r, y = -r - t, z = -r, w = r, k = t$.

Assim $Y \cap Z = (1, 0, 0, 0, 0)+$
$+ \langle(0, -1, 0, 0, 1), (-1, -1, -1, 1, 0)\rangle$.

(d) Queremos que $(x, y, z, w, k) = (1+r,\ 2+s,\ 3 + r + s,\ 4 + t,\ 5 + r + t)$. Para eliminar os parâmetros r, s, t, veja que $x = 1 + r, y = 2 + s, w = 4+t$. Assim $r = x-1, s = y-2, t = w-4$. Assim $z = 3+r+s = 3+(x-1)+(y-2) = x+y$, $k = 5 + r + t = 5 + (x - 1) + (w - 4) = x + w$. Logo o sistema é: $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -x - w + k = 0 \end{cases}$.

Prob 2.11: $a = 1, b = -1, c = 2$.

Prob 2.12: (a) CL das colunas:
$2(1, -2, 0) - 1(0, 1, 4) + 1(-1, 3, -3) = (2, -4, 0)+(0, -1, -4)+(-1, 3, -3) = (1, -2, -7)$;

(b) $\begin{bmatrix} (1, 0, -1) \cdot (2, -1, 1) \\ (-2, 1, 3) \cdot (2, -1, 1) \\ (0, 4, -3) \cdot (2, -1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$

Prob 2.13: Portanto queremos combinar 1 vez a primeira coluna mais 1 vez a segunda menos 1 vez a terceira (usando definição de produto matriz-vetor como CL das colunas): $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ele não é único: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ etc.

A.2.3 Extras

Ext 2.1: (c) $a = -2, b = -4, c = -29$.

Ext 2.2: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & b_2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & b_3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & b_4 \\ 1 & a_5 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & b_5 \end{array}\right]$.

Ext 2.3: (a) Vetor paralelo à reta r: $(2, 0, 0, 0, 0, 2) - (1, 1, 0, 0, 0, 0) = (1, -1, 0, 0, 0, 2)$. Assim $r = (1, 1, 0, 0, 0, 0) + t(1, -1, 0, 0, 0, 2)$. Para equações cartesianas, queremos $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = a = b = 0$, $c = 2t$. Tomando $t = x - 1$ obtemos o sistema $\begin{cases} y = 2 - x \\ z = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 2x - 2 \end{cases}$ (são 5 equações em $\mathbb{R}^6$ para determinar uma reta). Outra opção é $t = c/2$, $\begin{cases} x = 1 + c/2 \\ y = 1 - c/2 \\ z = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

(b) Podemos juntar as equações cartesianas do item (a) com as do sistema. Outra opção é substituir a parametrização de r no sistema. Como os pontos $(x, y, z, a, b, c) \in r$ satisfazem $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = a = b = 0$, $c = 2t$, $y - a + c = 1 = (1 - t) - 0 + 2t = 1 = 1 + t$
$x + y + c = 0 = (1 + t) + (1 - t) + 2t = 2 + 2t$. Logo $t = 0$ na 1a equação e $t = -1$ na 2a. Logo a interseção é vazia.

(c) Pelo item (b) basta que $x + y + c = 0 = 2 + 2t$. Assim $t = -1$ e o ponto de interseção é $(0, 2, 0, 0, 0, -2)$.

[0]Versão 10.out.2012 09h

(d) Pelo item (b) basta que $x+y+z=2=(1+t)+(1-t)+0=2$. Como isto é verdade para todo t, concluímos que a reta r pertence ao conjunto-solução do sistema. Assim a interseção é a própria reta r: Assim $r=(1,1,0,0,0,0)+\langle(1,-1,0,0,0,2)\rangle$.

Ext 2.4: (a) infinitas soluções: retas coincidentes; (b) sem solução: retas não se interceptam simultaneamente em um ponto.

Ext 2.5: (a)$\{x=0$; (b)$\{0x=1$; (c)$\{x+y=1$; (d)$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2x & = & 2 \end{array}\right.$; (e)$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2x & = & 3 \end{array}\right.$

Ext 2.6: (a) $\delta^2=4$ nenhuma solução, $\delta^2\neq 4$ solução única. (b) $\delta\neq -3/4$ solução única, $\delta=-3/4$ sem solução. (c) $\delta\notin\{0,\ 1\}$ solução única, $\delta=0$ infinitas soluções, $\delta=1$ sem solução. (d) $\beta\neq 0$ solução única, $\beta=0$ e $\delta=1$ infinitas soluções, $\beta=0$ e $\delta\neq 1$ sem solução. (e) $\delta\neq 5$ solução única, $\delta=5$ e $\beta=4$ infinitas soluções, $\delta=5$ e $\beta\neq 4$ sem solução. (f) $\delta\neq 4$ solução única, $\delta=4$ infinitas soluções.

Ext 2.7: $a=0$.

Ext 2.8: (a) $3b_1-b_2-4b_3=0$. (b) Não, pois $3(3)-5-4(-1)=8\neq 0$.

Ext 2.9: (a) $y=1$; (b) $y=1/2$; (c) O sistema não possui solução.

A.2.4 Desafios

Des 2.3: Seja r a razão da PG. Multiplicando a primeira linha por r^n obtemos a segunda linha. Multiplicando a primeira linha por r^{2n} obtemos a terceira linha. Assim após eliminação ficamos com somente a 1a linha. Podemos facilmente resolver o sistema.

Des 2.4: Veja `Wikipedia` em `LU_decomposition`.

Des 2.5: São duas as possibilidades para a forma totalmente escalonada de um sistema homogêneo $n\times n$. Uma é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A outra é que alguma linha zere durante o escalonamento e seja assim descartada, de forma que o número de linhas após o escalonamento (p, igual ao número de pivôs) seja menor do que o número e variáveis n.

Dado um sistema qualquer, consideremos o sistema homogêneo associado.

I. Se este se enquadrar no primeiro caso acima, a forma escalonada do sistema não-homogêneo original será, necessariamente, da forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \end{array}\right].$$

Este sistema tem solução única. A solução (isto é, os valores das $\star$'s) depene do lado direito do sistema original, mas a existência e unicidade são garantidas para todo lado direito. Esta é a alternativa (a).

II. Se este se enquadrar no segundo caso, temos um sistema com solução (pois sistemas homogêneos sempre o são) com $p<n$ e portanto $n-p$ variáveis livres. Isto implica em infinitas soluções. É a alternativa (b).

A.3 Espaços Vetoriais

A.3.1 Exercícios de Fixação

Fix 3.1: (a) sim; (b) não; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) não.

Fix 3.2: (a) $\mathbf{0}\in W$; (b) $6\mathbf{v}_2-5\mathbf{v}_3\in W$; (c) $\dim W\le n$

Fix 3.3: (a) $\mathbf{b}\notin\mathrm{Im}(A)$. (b) $\mathrm{Nuc}(A)=\{\mathbf{0}\}$.

Fix 3.4: (a) no máximo (b) pode ser gerador; (c) é gerador; (d) pode pertencer.

Fix 3.5: (a) no máximo (b) é LI; (c) pode ser LD; (d) não pertence.

Fix 3.6: (a) u é múltiplo de v; (b) nenhuma das alternativas. (c) não nulo.

Fix 3.7: (C).

Fix 3.8: base de W **escalonando** ... como linhas.

Fix 3.9: (a) pode aumentar; (b) pode diminuir.

Fix 3.10: (a) 1; (b) plano.

Fix 3.11: (a) não; (b) não. (c) não;

Fix 3.12: Todas falsas.

Fix 3.13: (a) $\mathbf{0}$; (b) $\mathbb{R}^3$.

Fix 3.14: Função identicamente nula.

Fix 3.15: (a) sim; (b) não; (c) sim;

[0]Versão 08.out.2012 09h

A.3.2 Problemas

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Prob 3.1: (a) não; (b) não; (c) sim;

Prob 3.2: (a) não é pois a soma de dois vetores pode ser igual a essa direção dada; (b) não é pois $(1, 1)$ está e o inverso aditivo $(-1, -1)$

Prob 3.3: (a) não; (b) sim. (c) sim.

Prob 3.4: (a) Não. (b) Sim. (c) O único conjunto de um único elemento que é LD é $\{\mathbf{0}\}$.

Prob 3.5: (a) Não. (b) Sim. (c) Não. (d) Um conjunto de dois elementos, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se e só se um dos vetores é múltiplo do outro, isto é, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, para algum α. Note que, no item **a**, $\mathbf{0} = 0(1, 0, -2)$, mas $(1, 0, -2) \neq \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}\ \forall\alpha$.

Prob 3.6: (a) Sim. (b) Não. (c) Não.

Prob 3.7: (a) não é; (b) não é; (c) é base; (d) não é;

Prob 3.8: (a) Sistema (1 equação) já esta totalmente escalonado. Como é 1 equação, 4 variáveis: 3 variáveis livres. Logo dimensão é 3. Como pivô é associado ao x, colocamos x como variável dependente e y, z, w como livres. $y = r, z = s, w = t$, $x = -y + w = -r + t$.
Logo $(x, y, z, w) =$
$= r(-1, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$. Base: $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

(b) Escalonando totalmente obtemos
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$. Como são 2 equações, 4 variáveis: 2 variáveis livres. Logo dimensão é 2. Como pivôs são associados a x e z, colocamos x, z como variáveis dependentes e y, w como livres. $y = r$, $w = s$, $x = 0$, $z = w = s$. Logo $(x, y, z, w) = r(0, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 1)$. Base: $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

(c) Sistema (2 equações) já esta totalmente escalonado. Como são 2 equações, 4 variáveis: 2 variáveis livres. Logo dimensão é 2. Como pivôs são associados a y e w, colocamos y, w como variáveis dependentes e x, z como livres. $x = r$, $z = s$, $y = -3z = -3s$, $w = 0$. Logo $(x, y, z, w) = r(1, 0, 0, 0) + s(0, -3, 1, 0)$. Base: $\{(1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0)\}$.

(d) reescrevendo parametrização,
$(x, y, z, w) = r(1, 0, 2, 1) + s(2, -1, 1, 0) +$
$+ t(1, -2, -4, -3)$. Não podemos concluir que dimensão é 3! Temos que escalonar matriz (não precisa escalonar totalmente) com vetores em linhas para ver dimensão do espaço gerado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto dimensão 2 e base
$\{(1, 0, 2, 1), (0, -1, -3, -2)\}$.

Prob 3.9: Note que V e Z são planos e W é uma reta. Assim esperamos, de forma geral que: $V \cap W$ e $Z \cap W$ sejam retas e $Z \cap V$ seja um ponto. (a) Basta resolver $\left\{\begin{array}{c} x + y - w = 0 \\ x + z - w = 0 \\ -z + w = 0 \end{array}\right.$. $(x, y, z, w) = t(0, 1, 1, 1)$. Uma base é $\{(0, 1, 1, 1)\}$. (b) Parametrização para Z é: $(x, yt, z, w) = (s, s + t, 2s + t, s)$. Para pertencer a V devemos ter $x + y - w = 0 = s + s + t - s = s + t$. Assim $s = -t$ e portanto a interseção é $t(-1, 0, -1, -1)$. Uma base é $\{(-1, 0, -1, -1)\}$. (c) Veja (b) e conclua que devemos resolver o sistema $\left\{\begin{array}{c} 2s + t = 0 \\ -s - t = 0 \end{array}\right.$ cuja solução (única) é $(s, t) = (0, 0)$. Assim a interseção é somente o $(0, 0)$. A base é o conjunto vazio $\emptyset$ (veja Convenção 3.10 da p.71).

Prob 3.10: (a) Base de W_1: $\{(1, -1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)\}$ (b) Base de W_2: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, -1, 1, 0)\}$ dimensão 2. (c) Basta juntar as bases e escalonar. Vamos obter dimensão 3 e base:
$\{(-1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.

LI e LD: teóricos

Prob 3.11: $1(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + 1(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + 1(\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial que dá o vetor nulo.

Prob 3.12: (a) se $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$, então $1\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial dando o vetor nulo.

(b) se $\sum_{i=2}^{n} (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ é uma combinação linear não-trivial dando o vetor nulo, então $0\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} (-\alpha_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ também o é. Isto é, se $\{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ não é LI, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também não é.

(c) se fosse verdadeiro, pelo item (a) teríamos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD.

Prob 3.13: (a) 3; (b) 2 (c) 1 (d) 0.

Espaços de Polinômios e Funções

Prob 3.14: (a) sim; (b) não; (c) não; (d) sim.

Prob 3.15: (a) $1(1 + 2x) - (3/2)(1 + x) + (1/2)(1 - x) = 0$; (b) $1 - \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = 0$.

Prob 3.16: (a) LD; (b) LI; (c) LI.

Prob 3.17: (a) se $f' = 0$, então f é constante, isto é, $f(x) = c$ para todo x. Logo, $f = cg$, dado que $g(x) = 1$ para todo x;

(b) sabemos (do cálculo) que se $f' = f$, então $f(x) = ce^x$ para alguma constante c. Logo $f = cg$.

Prob 3.18: (a) sim; (b) não;

A.3.3 Extras

Subespaços do $\mathbb{R}^n$

Ext 3.1: (a) sim; (b) LI para $k \neq 1$ e $k \neq -2$. (c) não.

Ext 3.2: Escalonando (não precisa ser escalonamento total) uma matriz onde cada linha é um vetor obtemos: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. São 3 vetores LIs em $\mathbb{R}^3$: é base. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. São 2 vetores LIs em $\mathbb{R}^3$: não é base.

Ext 3.3: (a) Dimensão 3 e base $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. (b) Dimensão 2 e base $\{(0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$.

Ext 3.4: (a) Dimensão 2 e base $\{(1, 2, 1, 0), (0, -1, 2, 1)\}$. (b) Dimensão 2 e base $\{(1, 0, 1, -1), (0, 3, 1, 2)\}$. (c) Dimensão 2 e base $\{(1, 2, 0, 1, 2), (0, 2, 1, 3, 3)\}$.

Ext 3.5: 1ª parte (se): assuma $ad - bc = 0$. Se $a = b = c = d = 0$, então (a, b) e (c, d) são LD. Caso contrário, temos que vale uma das seguintes alternativas: (i) $(a, c) \neq (0, 0)$ e portanto $c(a, b) - a(c, d) = (ca - ac, bc - ad) = (0, 0)$ é combinação linear não-trivial dando zero ou (ii) $(b, d) \neq (0, 0)$ e portanto $d(a, b) - b(c, d) = (da - bc, db - bd) = (0, 0)$ é combinação linear não-trivial dando zero.

2ª parte (somente se): assuma (a, b) e (c, d) LD. Temos que vale uma das seguintes alternativas: (i)$(a, b) = \lambda(c, d)$, isto é, $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, de forma que $ad = \lambda cd = bc$ e $ad - bc = 0$ ou (ii) $(c, d) = \lambda(a, b)$, isto é, $c = \lambda a$ e $d = \lambda b$, de forma que $bc = \lambda ab = ad$ e $ad - bc = 0$.

Ext 3.6: (a) qualquer uma das três; (b) basta tomar o múltiplo de uma delas. por exemplo $2x - 2y = 0$.

LI e LD: teóricos

Ext 3.7: $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1) + \alpha_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, se, e somente se, $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \end{cases}$, se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Ext 3.8: (a) O vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é solução do sistema se, e somente se $\mathbf{b} = \sum x_i\mathbf{v}_i$ onde $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$ são as colunas da matriz A. Podemos escrever $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sempre como CL dos $\mathbf{v}_i$'s se, e somente se, os $\mathbf{v}_i$'s formam um conjunto gerador. (b) Pelo item (a) teremos a unicidade da representação de um vetor $\mathbf{b}$ como CL de $\mathbf{v}_i$'s se, e somente se, o conjunto é LI.

Ext 3.9: (a) solução única. (b) pode ser vazio (sem solução).

Ext 3.10: (a) Decorre trivialmente do resultado de que um conjunto é LD se e só se existe um vetor que é combinação linear dos demais. (b) Decorre trivialmente de (a).

Ext 3.11: Lembre que um conjunto é LD se e só se existe um vetor que é combinação linear dos anteriores. No conjunto $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, este não é o caso de nenhum dos $n - 1$ primeiros vetores, dado que eles formam um conjunto LI. Também não é o caso do n-ésimo vetor, por (b). Logo $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ não é LD.

Ext 3.12: (a) Veja Exemplo 3.13 da p.70. (b) tome uma base para $H \cap K$; estenda-a a base de H e estenda-a a base de K.

Espaços de Funções ou Polinômios

Ext 3.13: (a) Pelo Teorema do Valor Médio f' é constante. Logo $f(x) = ax + b = ag + bh$. (b) Bem mais difícil. Precisamos do Wronskiano (veja Definição 6.24 da p.193). Dadas três funções f, g, h no subespaço pode-se provar que serão LDs. De fato se $af + bg + ch = 0$, então (derivando duas vezes) obtemos que $af' + bg' + ch' = 0$ e $af'' + bg'' + ch'' = 0$. Logo queremos saber se o sistema $\begin{bmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ possui somente solução trivial. Mas o determinante da matriz é $fg'h'' + gh'f'' + \cdots$. Podemos substituir h'' por $-h$, g'' por $-g$ e f'' por $-f$ (porque?). Fazendo as contas vamos obter que o determinante é zero e portanto o sistema tem uma solução não-trivial. Logo qualquer conjunto com pelo menos 3 funções será LD. Como sen e $\cos$ são LIs (uma não é múltipla da outra) concluímos que elas formam uma base deste subespaço.

Ext 3.14: (a) sim; (b) sim; (c) não (basta notar que $f(x) \equiv 0$ não pertence ao conjunto); (d) sim.

Ext 3.15: (a) sim; (b) sim;

Ext 3.16: Como elementos $p \in \mathcal{P}_4$ são da forma $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ temos que introduzir restrições: (a) $a + b + c + d + e = 0$. Logo dimensao V é 4. Base: $\{1-x^4, x-x^4, x^2-x^4, x^3-x^4\}$. (b) $a - b + c - d + e = 0$. Logo dimensao W é 4. Base: $\{1 - x^4, x + x^4, x^2 - x^4, x^3 + x^4\}$. (c) Duas restrições: $a+b+c+d+e = 0$ e $a-b+c-d+e = 0$. São equivalentes a $a+b+c+d+e = 0$ e $b+d = 0$ (escalonando). Assim dimensão é 3 e colocando c, d, e como parâmetros obtemos a base $\{-x^4 + 1, -x^3 + x, -x^4 + x^2\}$.

Ext 3.17: Como $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$, ela é redundante. É claro que $\cos^2$ não é múltiplo de sen^2. Assim a dimensão é 2.

A.3.4 Desafios

Des 3.1: Suponha que existe $\mathbf{v} \neq 0$ com $\mathbf{v} \in V$.

Des 3.2: Suponha que $W \neq V$. Então existe $\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{v} \notin W$. Logo se β é base de W, $\beta \cup \{\mathbf{v}\}$ é LI e portanto $\dim V > \dim W$, contradizendo a hipótese.

Des 3.3: (a) Suponha que H é subespaço afim. Então dados $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H$ existem $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ com $\mathbf{u}_i = \mathbf{h}_0 + \mathbf{w}_i$. Assim $\theta\mathbf{u}_1 + (1-\theta)\mathbf{u}_2 = \mathbf{h}_0 + \theta\mathbf{w}_1 + (1-\theta)\mathbf{w}_2$. Como W é subespaço vetorial, $\theta\mathbf{w}_1 + (1-\theta)\mathbf{w}_2 \in W$.

Agora suponha que H posua a propriedade que se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, vale $\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v} \in H$. Seja $\mathbf{h}_0 \in H$ um elemento. Vamos provar que $W = H - \mathbf{h}_0$ é um subespaço vetorial. De fato é claro que (porque?) $\mathbf{0} \in W$. Seja $\mathbf{w} \in W$. Logo $\mathbf{w} = \mathbf{h} - \mathbf{h}_0$ com $\mathbf{h} \in H$. Queremos provar que $\theta\mathbf{w} \in W$ para todo θ. Ora $\theta\mathbf{w} = \theta\mathbf{h} + (1-\theta)\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_0$. Pela propriedade de H, $\theta\mathbf{h} + (1-\theta)\mathbf{h}_0 \in H$. Logo $\theta\mathbf{w} \in W$. Para provar que é fechado para soma, dados $\mathbf{w}_i \in W$, $\mathbf{w}_i = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_0$. Temos que $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)/2 = 1/2(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) - \mathbf{h}_0$. Pela propriedade de H (tome $\theta = 1/2$) o primeiro termo pertence a H. Logo $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)/2 \in W$. Pela primeira parte podemos multiplicar por dois e concluir o resultado.

(b) H contém a reta que passa por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Des 3.4: Escalone (não precisa ser escalonamento total) os vetores geradores de V, elimine linhas nulas e obtenha matriz A. Caso A tenha menos de n linhas, introduza linhas LIs colocando 1 nas colunas sem pivô e zero nas outras entradas.

Des 3.5: (a) É claro que $f(x) \equiv 0$ satisfaz à equação. Sejam f_1 e f_2 satisfazendo $f_1''(x) + p(x)f_1'(x) + q(x)f_1(x) = 0$ e $f_2''(x) + p(x)f_2'(x) + q(x)f_2(x) = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Então $(\alpha f_1 + f_2)''(x) + p(x)(\alpha f_1 + f_2)'(x) + q(x)(\alpha f_1 + f_2)(x) = \alpha(f_1''(x) + p(x)f_1'(x) + q(x)f_1(x)) + (f_2''(x) + p(x)f_2'(x) + q(x)f_2(x)) = 0$ e portanto $\alpha f_1 + f_2$ é também solução. (c) Sejam $f, g, h \in V$. Mostre que determinante wronskiano (veja Definição 6.24 da p.193). é zero.

Des 3.6: (c) $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Des 3.7: (a) Suponha que $\sum \lambda_i f_i(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tome $x = 1 + 1/2, 2 + 1/2, \ldots$ e conclua que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …(b) Como existe conjunto infinitos LI o espaço é de dimensão infinita.

Des 3.8: A diferença para Definição 3.18 da p.77 é utilizar V ao invés de $\mathbb{R}$. A soma de funções será feita com a operação de soma em V.

Des 3.10: Pode-se ver que $\log : P \to \mathbb{R}$ é uma bijeção que preserva as operações (dizemos que é um isomorfismo linear). Assim $\dim(P) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ e uma base é $e \in P$ ou qualque outro número positivo.

A.4 Transformações Lineares

A.4.1 Exercícios de Fixação

Fix 4.1: (a) não; (b) sim; (c) não;

Fix 4.2: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $T(x, y, z) = (x - z,\ 3x + 2z)$; (d) $T(x, y) = (-x + 8y)$.

Fix 4.3: (a) $T(x, y) = (0,\ y)$. (b) $T(x, y, z) = (0,\ y,\ 0)$. (c) $T(x, y, z) = (0,\ y,\ z)$.

Fix 4.4: (b) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

[0] 07.out.2012 15h

Fix 4.5: (a) $\dim \operatorname{Im} A$. (b) $\operatorname{Im} A$. (c) $\operatorname{Im} A^T$.

Fix 4.6: (a) $\mathbf{0}$; (b) V; (c) V; (d) $\mathbf{0}$.

Fix 4.7: (i) (C); (ii) (A); (iii) (D); (iv) (C).

Fix 4.8: (a) Núcleo é o plano perpendicular a $(2,1,1)$, isto é, o plano $2x+y+z=0$. Imagem é a reta gerada por $(2,1,1)$. (b) Núcleo é o $\mathbf{0}$ somente. Imagem é todo $\mathbb{R}^3$. (c) Núcleo é o vetor $\mathbf{0}$ somente. Imagem é todo $\mathbb{R}^3$. (d) Núcleo é a reta gerada por $(1,0,0)$ (o eixo x). Imagem é o plano $x=0$, gerado pelos eixos y e z.

Fix 4.9: (a) r; (b) $\mathbf{0}$; (c) $PP=P$; (d) $RR=I$; (e) $RP=P$; (f) $PR=P$; (g) $P^n=P$ e $R^{2k}=I$; $R^{2k+1}=R$.

Fix 4.10: (a) 7; (b) 4; (c) 2;

Fix 4.11: (a) 2; (b) 5;

Fix 4.12: (a) 2; (b) 0;

Fix 4.13: (a) falsa; (b) verdadeira; (c) falso; (d) verdadeiro. (e) falso, $\dim(\operatorname{Nuc}(T))=0$.

Fix 4.14: Somente (b) $3x-4$, (d) 5.

Fix 4.15: n é dimensão do domínio e m do contradomínio. (a) Falso. Por exemplo, tome uma matriz $m\times n$ com todas as entradas iguais a 0; (b) verdadeiro pois se a dimensão do domínio é maior do que a do contradomínio, então $\dim(\operatorname{Nuc}(A))>0$.

Fix 4.16: (a) e (c) somente.

Fix 4.17: $A^2+AB+BA+B^2$.

Fix 4.18: (a) das colunas de A; (b) das linhas de B; (c) linhas de A por colunas de B;

Fix 4.19: (a) 0; (b) n. (c) n.

Fix 4.20: (a) $\mathbf{u}=(1,3,2,-2)$. (b) $\mathbf{v}=(3,0,1,5)$. (c) $\mathbf{w}=(-2,3,0,2)$.

Fix 4.21: CB^{-1}.

Fix 4.22: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Fix 4.23: (A)

Fix 4.24: Pensando em matriz como representação de uma TL, a definição do produto entre duas matrizes A e B é baseada na ideia que AB representa a composição entre as TLs T_A e T_B. Caso fosse definida de outra forma não representaria a composição. Mas pode ser útil utilizar esta e outras definições. Veja na `Wikipedia Hadamard product`, `Frobenius` e `Kronecker product`.

A.4.2 Problemas

Prob 4.1: Veja o efeito nos vetores da base canônica.

(a) $T(1,0)=(0,-1)$, $T(0,1)=(-1,0)$. Logo $T(x,y)=(-y,-x)$. (b) $T(1,0,0)=(1,0,0)$, $T(0,1,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $T(0,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$. Assim, $T(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x\sqrt{2},\ y+z,\ y+z)$. (c) $T(1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $T(0,1,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $T(0,0,1)=(0,0,1)$.
Assim, $T(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y,\ x+y,\ z\sqrt{2})$.

Prob 4.2: (a) $PQ=0$. (b) $QP=0$. (c) $QR=-Q$; (d) $RQ=-Q$;

Prob 4.3: (a) Não. (b) sim; (c) não.

Prob 4.4: (a) Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. São 3 variáveis, 2 equações: $3-2=1$ variável livre. Como a coluna sem pivô é a terceira, colocamos z como variável livre. São dependentes x e y. Colocando $z=r$, $x=-z=-r$ e $y=-z=-r$. Logo, $(x,y,z)=(-r,-r,r)=r(-1,-1,1)$. Logo o núcleo tem dimensão 1 e base $\{(-1,-1,1)\}$.

Pelo TNI, dimensão da imagem é $3-1=2$. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1),\dots,T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1,0,-1,0),(0,-1,0,1)\}$.

(b) Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$. São 3 variáveis, 2 equações: $3-2=1$ variável livre. Como a coluna sem pivô é a terceira, colocamos z como variável livre. São dependentes x e y. Colocando $z=r$, $x=-z/2=-r/2$ e $y=-z/2=-r/2$. Logo, $(x,y,z)=(-r/2,-r/2,r)=r(-1/2,-1/2,1)$. Logo o núcleo tem dimensão 1 e base $\{(-1/2,-1/2,1)\}$.

Pelo TNI, dimensão da imagem é $3-1=$

2. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1,2,0),(0,2,2)\}$.

(c) Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

achamos o núcleo. Escalonando totalmente a matriz obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. São 5 variáveis, 2 equações: $5-2=3$ variáveis livres. Como são colunas com pivô primeira e terceira, a e c são dependentes. São livres: b,d,e. Colocando $b=r, d=s, e=t$, $a=-3d+4e=-s+t$, $c=d-e=s-t$. Logo, $(a,b,c,d,e)=(-3s+4t,\ r,\ s-t,\ s,\ t)=r(0,1,0,0,0)+s(-3,0,1,1,0)+t(4,0,-1,0,1)$. Logo o núcleo tem dimensão 3 e base
$\{(0,1,0,0,0),(-3,0,1,1,0),(4,0,-1,0,1)\}$.

Pelo TNI, dimensão da imagem é $5-3=2$. Para calcular a base montamos a matriz com $T(\mathbf{e}_1),\ldots,T(\mathbf{e}_n)$ nas linhas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Escalonando (parcialmente, não precisa ser totalmente escalonada), $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo a imagem tem dimensão 2 e base $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Prob 4.5: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Prob 4.6: (a) Escalonando: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Resolvendo concluímos que o Núcleo tem dimensão 0 com base $\emptyset$ (conjunto vazio é a base do espaço $\mathbf{0}$). A imagem é (2 colunas da matriz são LIs) $\langle(1,2,0,-1),(0,0,1,-2)\rangle$, com dimensão 2.

(b) Escalonando: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sistema $\begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. Resolvendo concluímos que o Núcleo é $\langle(2,-1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$, com dimensão 2. Determinamos imagem escalonando $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Imagem é $\langle(1,0,-1),(0,1,1)\rangle$, com dimensão 2.

(c) Escalonando: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sistema $\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. Resolvendo concluímos que o Núcleo é $\langle(1,-1,1)\rangle$, com dimensão 1. Determinamos imagem escalonando $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
A imagem é $\langle(1,0,1,0),(0,2,-1,1\rangle$ com dimensão 2.

(d) Escalonando: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sistema $\begin{cases} x-z=0 \\ y-w=0 \end{cases}$. Resolvendo concluímos que o Núcleo é $\langle(1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$ com dimensão 2. Determinamos imagem escalonando $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Imagem é $\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$, com dimensão 2.

Prob 4.7: São lineares somente (a) e (c).

Prob 4.8: (a) $\mathrm{Nuc}(T)=\mathrm{Im}(T)=\mathcal{P}_1$.
(b) $\mathrm{Nuc}(T)$ é o conjunto dos polinômios da forma $(x-3)q(x)$, $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}$.(c) $\mathrm{Nuc}(T)=0, \mathrm{Im}(T)=\langle x,x^2,x^3\rangle$ (d) A imagem é $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (sobrejetiva) pois dado $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ defina $h(x)=\int_0^x g(s)\,ds$, pelo teorema fundamental do cálculo $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $T(h)=g$. O núcleo são funções constantes.

Prob 4.9: (a) Contradiz o Teo. do Núcleo e da Imagem (dimensão do núcleo só com a origem $(=0)$ mais dimensão da imagem (no máximo $=2$) é *menor* do que a dimensão do espaço de partida $(=4)$. Ou, mais intuitivamente, um espaço de dimensão 4 está sendo levado pela TL num espaço de dimensão 2. A imagem portanto tem dimensão no máximo 2. Assim, é preciso que um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão ao menos 2 seja levado (colapse) no 0 pela TL.

(c) Para que a TL seja injetiva, seu núcleo deve ser trivial, ou seja, deve conter apenas o 0 (de $\mathbb{R}^4$). Nesse caso a dimensão do núcleo é 0 (contém apenas um ponto). Mas na TL dada, o núcleo deve ter dimensão pelo menos 2 (vide resposta do item (a)).

(e) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 7$. Ora, como a soma de dois números iguais daria um número ímpar? Impossível.

(g) Note que os vetores da base do núcleo são LI (e $\dim(N(T)) = 2$), mas que os vetores (1,1,2) e (2,2,4) que geram a imagem são LD, e logo basta um deles para gerar o mesmo espaço (logo $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$). Mas aí, novamente, não conseguiríamos satisfazer ao Teo. do Núcleo e da Imagem. Logo não é possível existir tal TL.

Prob 4.10: (a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $T(x, y, z, w) = (2x + 2y + z + w, x + y - z + 2w, 4x + 4y + z + 3w)$. Solução: Uma base do núcleo é $(1, 0, -1, -1)$ e $(0, 1, -1, -1)$. Podemos completar esta base, por exemplo, com $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Podemos agora determinar completamente T por $T(1, 0, -1, -1) = T(0, 1, -1, -1) = 0$, $T(0, 0, 1, 0) = (1, -1, 1)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (1, 2, 3)$.

(c) $T(x, y, z) = (0, 0, -x - y + z, -x - y + z)$ Solução: O núcleo é gerado por $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$. A imagem é gerada por $(0, 0, 1, 1)$. Portanto, $T(1, 0, 1) = T(0, 1, 1) = 0$. Como $(0, 0, 1)$ completa a base do $\mathbb{R}^3$ (entre outras possibilidades), colocamos $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1)$. Agora sabemos T em três vetores da base de uma base do $\mathbb{R}^3$. Portanto podemos determinar que $T(x, y, z) = (0, 0, -x - y + z, -x - y + z)$.

Prob 4.11: Observe o seguinte: Caso 0 não fosse raíz de p, i.e., não houvesse a restrição $p(0) = 0$ sobre os elementos de W, então o núcleo da transformação linear derivada primeira seria somente os polinômios constantes, da forma $p(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$. Mas polinômios dessa forma só satisfazem a restrição $p(0) = 0$ em W quando $a = 0$ (caso contrário teríamos $p(0) = a$, com $a \neq 0$ e daí p não pertenceria a W), donde concluímos que o único polinômio levado no 0 pela TL derivada primeira é o polinômio nulo. Logo D é injetiva.

Prob 4.12: $(2, -1)$ e $(-2, 3)$.

Prob 4.13: Veja como calcular com `Maxima` na Observação 4.16 da p.114. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
(b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Prob 4.14: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$T^{-1} = \left[T^{-1}\right]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

Prob 4.15: (a) $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Prob 4.16: $S^2 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Prob 4.17: (a) Há infinitas respostas. Por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. (b) Neste caso $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$.

A.4.3 Extras

TL e Matriz, TL Geométrica

Ext 4.1: Todas as operações são lineares. Vamos explicar (a) em detalhes. (a) Como $T(\alpha p + q)(x) = x(\alpha p(x) + q(x)) = \alpha x p(x) + x q(x) = (\alpha T(p) + T(q))(x)$, concluímos que é linear.

Ext 4.2: (a) não; (b) $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Ext 4.3: (a) É claro que rodar 4 vezes 90 graus resultará na identidade. Para (b) e (c) opere com $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Núcleo, Imagem, Teorema do Núcleo Imagem

Ext 4.4: (a) 7; (b) 7;

Ext 4.5: (a) $\dim \mathrm{Im}\, T = 4$; $\dim \mathrm{Nuc}\, T = 0$; (b) $\dim \mathrm{Im}\, T = 5$. $\dim \mathrm{Nuc}\, T = 1$;

Ext 4.6: (c) 3; (d) 0.

Ext 4.7: (a) Escalonando obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

cujo sistema é $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Núcleo tem dimensão 1 e é igual a $\langle(1,-1,1)\rangle$. Determinamos imagem escalonando $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Após escalonar obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Imagem tem dimensão 2 e é igual a $\langle(1,0,0,0),(0,1,0,-1)\rangle$.

(b) Núcleo é $x+z=0$ e $y+z=0$, cuja dimensão é 1, gerado por $(1,1,-1)$, imagem é $\langle(1,0,2,3),(0,1,-2,-2)\rangle$, dimensão 2.

(c) Núcleo é o plano xw, $y=z=0$, com dimensão 2. Imagem é $\langle(1,0,0,0),(0,0,0,1)\rangle$ com dimensão 2.

Ext 4.8: (a) Coloque a matriz na forma escalonada (não precisa ser reduzida). Para que o posto seja 1, precisamos de apenas 1 pivot. Logo $5-2h=0$, ou $h=\frac{5}{2}$. (b) Coloque a matriz na forma escalonada (não precisa ser reduzida). Para que o posto seja 2, precisamos de 2 pivôs. Logo $5-2h\neq 0$, ou $h\in\mathbb{R}, h\neq\frac{5}{2}$.

Ext 4.9: (a) $T(0)=T(0+(-1)0)=T(0)+(-1)T(0)=T(0)-T(0)=0$ (usamos somente a linearidade de T).

(c) Contém o 0, e está fechado pela soma e multiplicação por escalar: Considere $\bar{v}$ e $\hat{v}$ em $N(T)$ (ou seja: $T(\bar{v})=0$ e $T(\hat{v})=0$), e $\alpha\in\mathbb{R}$. Então $T(\bar{v}+\alpha\hat{v})=T(\bar{v})+\alpha T(\hat{v})=0+\alpha 0=0$. Logo $N(T)$ é subespaço vetorial.

(d) Vamos usar que, se T é injetiva, o único elemento do núcleo é o 0. Suponha, por exemplo, que $T(v_i)=\lambda T(v_j)$, com $i\neq j$. Então $T(v_i)-\lambda T(v_j)=0$. Usando a linearidade de T, temos que $T(v_i-\lambda v_j)=0$. Agora, usando a injetividade de T, concluímos que $(v_i-\lambda v_j)=0$, ou $v_i=\lambda v_j$. Contradição, pois por hipótese os v_i's eram LI.

(d) (solução alternativa) Seja $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ LI. Considere a sua imagem por T, $\{T(\mathbf{v}_1),\cdots,T(\mathbf{v}_p)\}$. Para discutir a independência linear deste conjunto, devemos verificar quando $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{0}$. Mas, por linearidade, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i T(\mathbf{v}_i)=T\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{v}_i\right)$ e $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. Da injetividade de T, segue que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$, o que, pela independência dos $\mathbf{v}_i$'s, implica em α_i's todos nulos. Mas isto garante a independência de $\{T(\mathbf{v}_1),\cdots,T(\mathbf{v}_p)\}$.

(e) Seja $\beta=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ base de V. Então, pelo exercício anterior, $T(\beta)=\{T(\mathbf{v}_1),\cdots,T(\mathbf{v}_n)\}$ é um conjunto LI. Mas um conjunto de n vetores LI em um espaço de dimensão n é uma base.

Composição de TLs e Produto de Matrizes

Ext 4.10: (a) Se $ST\mathbf{v}=ST\mathbf{w}$, como S é injetiva, $T\mathbf{v}=T\mathbf{w}$. Como T é injetiva, $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

(b) Dado $\mathbf{w}$ qualquer, como S é sobrejetiva, existe $\mathbf{y}$ com $S\mathbf{y}=\mathbf{w}$. Como T é sobrejetiva, existe $\mathbf{v}$ com $T\mathbf{v}=\mathbf{y}$. Assim, $ST\mathbf{v}=S\mathbf{y}=\mathbf{w}$. Logo ST é sobrejetiva.

(c) Dado $\mathbf{w}$ qualquer, como ST é sobrejetiva, existe $\mathbf{y}$ com $ST\mathbf{y}=\mathbf{w}$. Logo tomando $\mathbf{v}=T\mathbf{y}$, $S\mathbf{v}=\mathbf{w}$. Assim S é sobrejetiva.

(d) Se $T\mathbf{v}=T\mathbf{w}$, então $ST\mathbf{v}=ST\mathbf{w}$. Como ST é injetiva, $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

Função e Matriz Inversa

Ext 4.11: (a) $\operatorname{Nuc} T=\mathbf{0}$. T é sobrejetiva: de fato, dado h defina $f(x)=h(x/2-1)$ e $T(f)(x)=h((2x+2)/2-1)=h(x)$. Assim, $\operatorname{Im} T=\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(b) $((T\circ S)(f))(x)=(T(S(f)))(x)=(S(f))(2x+2)=f((2x+2)/2-1)=f(x)$. $\forall x,\forall f$. Isto implica que $(T\circ S)(f)=f$, $\forall f$, o que implica que, $T\circ S=I$.

De forma análoga, mostra-se que $S\circ T=I$. Assim, $T^{-1}=S$.

Ext 4.12: (a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.13: $T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$T^{-1}=\left[T^{-1}\right]_{\varepsilon}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Álgebra de Matrizes e TLs

Ext 4.14: (a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (projeção). (d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (reflexão).

Ext 4.15: (a) $P_x(a,b)=(a,0)$ e $P_y(a,b)=(0,b)$. Assim $P_xP_y(a,b)=P_x(0,b)=(0,0)$.

(b) $D_{xx}D_{xxx}=D_{xxxxx}$ que em polinômios de grau 4 resultará no polinômio zero.

Ext 4.16: (a) sim; (b) sim; (c) sim.

(d) Defina A_{ij} a matriz que todas entradas são zero menos $a_{ij} = 1$.

Para matriz 2×2: Base de triangular superior: A_{11}, A_{12}, A_{22}. Base de diagonal: A_{11}, A_{22}. Base de simétrica: $A_{11}, A_{12} + A_{21}, A_{22}$.

Para matriz 3×3: Base de triangular superior: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}$. Base de diagonal: A_{11}, A_{22}, A_{33}. Base de simétrica: $A_{11}, A_{12} + A_{21}, A_{13} + A_{31}, A_{22}, A_{23} + A_{32}, A_{33}$.

(e) As únicas matrizes simultaneamente triangulares superiores e inferiores são as diagonais.

Ext 4.17: (a) Defina $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Então $\{A_{11}, A_{12}, A_{13}A_{21}, A_{22}, A_{23}\}$ é base pois

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} +$$

$$+ a_{13}A_{13} + a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

A dimensão é 6.

(b) Defina $A_{kl} = (a_{ij})$ uma matriz com zeros em todas as entradas menos $a_{kl} = 1$ (veja item (a)). O conjunto $\{A_{kl};\ 1 \le k \le m;\ 1 \le l \le n\}$ é base de $\mathcal{M}_{m\times n}$ e a dimensão é mn.

Ext 4.18: (a) $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$. (b) $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_{n\times n}$. (c) e (d) T é bijetiva (injetiva e sobrejetiva).

Ext 4.19: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Ext 4.20: (b) $k = 3$; (c) $k = n + 1$; (d) Basta fazer a conta $(I - N)(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}) = I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1} - N(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^k) = I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1} - N - N^2 - N^3 - \cdots - N^n - N^k = I - N^k$. Como $N^k = 0$, $(I - N)(I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^{k-1}) = I$. (e) Como $MN = NM$, $(M + N)^k$ pode ser calcular por binômio de Taylor. Para k grande o suficiente todos os termos serão iguais a zero. (f) Como $N^k = 0$ e $N^{k-1} \neq 0$, existe $\mathbf{w}$ tal que $N^{k-1}\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Defina $\mathbf{v} = N^{k-1}\mathbf{w}$. Assim $N\mathbf{v} = N^k\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Matriz em Blocos

Ext 4.21: $AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \cdots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \Sigma.$

Coordenadas

Ext 4.22: (a) $\mathbf{v} = 4(1, -1, 0) + 3(0, 1, -1) + 2(0, 0, 1)$; (b) $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; (c) $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;
(d) $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

Ext 4.23: $\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ext 4.24: $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.25: Temos que resolver o sistema $(0, 5, 1) = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, 0) + c(1, 0, -1)$. Resolvendo obtemos que $(a, b, c) = (2, 3, 1)$.
Logo, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.26: (a) $[q]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $[p]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Ext 4.27: $[f]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ pois $f = 4\phi_0 + 3\phi_1 + 5\phi_2 + 2\phi_3$.

Mudança de Base

Ext 4.28: Para ambos itens, a matriz identidade.

Ext 4.29: $[I]_{\alpha\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ext 4.30: (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

(b) $[I]_{\alpha\leftarrow\varepsilon} = A^{-1}$, $[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon} = B^{-1}$, $[I]_{\alpha\leftarrow\beta} = A^{-1}B$, $[I]_{\beta\leftarrow\alpha} = B^{-1}A$.

Ext 4.31: A base β são as colunas da matriz $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta} = [I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha}[I]_{\alpha\leftarrow\beta}$.

Como $[I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos que $\beta = \{(-1,3,3),(1,-1,-1),(-1,0,2)\}$.

Ext 4.32: $[I]_{\beta\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ext 4.33: (a) $[I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $[I]_{\alpha\leftarrow\varepsilon} = [I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha}^{-1}$.

(c) Basta verificar que $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}[I]_{\varepsilon\leftarrow\alpha} = I$.

Ext 4.34: (a) $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ cuja inversa é $[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; (c) $[\mathbf{w}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(d) $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ext 4.35: (a) A resposta não é única. Por exemplo, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (b) Um não é múltiplo do outro, portanto são dois vetores LI em $\mathbb{R}^2$. (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ext 4.36: $[I]_{\alpha\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

$[I]_{\gamma\leftarrow\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.37: (a) $[D]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $[D]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $[D]_{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $[D^2]_{\beta_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $[D^2]_{\beta_5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$.

(f) $[D^2]_{\beta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.38: (a) Se $p = 1$, $T(p)(x) = p(x+1) = 1$ e $[1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x$, $T(p) = p(x+1) = x+1$ e $[x+1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x^2$, $T(p)(x) = p(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$ e $[x^2+2x+1]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo $[T]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Se $p = 1$, $S(p)(x) = xp(x) = x1 = x$ e $[x]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se $p = x$, $S(p)(x) = xp(x) = xx = x^2$ e $[x^2]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, $[S]_{\beta_2\leftarrow\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ext 4.39: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

A.4.4 Desafios

Des 4.1: (a) Se $\operatorname{Nuc}(T) \supset \operatorname{Im}(T)$, então $T\mathbf{v} \in \operatorname{Im} T \subset \operatorname{Nuc} T\ \forall \mathbf{v}$. Logo $T\mathbf{v} \in \operatorname{Nuc} T$ e portanto $T(T\mathbf{v}) = \mathbf{0} = T^2\mathbf{v}\ \forall\mathbf{v}$. Logo $T^2 = 0$.

Se $T^2 = 0$ e $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} T$, $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$ para algum $\mathbf{v}$, $T\mathbf{w} = T^2\mathbf{v} = 0$. Logo $\mathbf{w} \in \operatorname{Nuc} T$.

(b) Se $\mathbf{v} \in \operatorname{Nuc} T^k$, $T^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Logo $T(T^k\mathbf{v}) = \mathbf{0} = T^{k+1}\mathbf{v}$. Logo $\mathbf{v} \in \operatorname{Nuc} T^{k+1}$.

(c) Se $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} T^{k+1}$, $\mathbf{w} = T^{k+1}\mathbf{v} = T^k(T\mathbf{v})$. Logo $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} T^k$.

(d) Por (c) $\operatorname{Im} T \supset \operatorname{Im} T^2$. Como as dimensões são iguais, $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$. Pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI)e (b), $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Nuc} T^2$. Se $\mathbf{v} \in \operatorname{Nuc} T \cap \operatorname{Im} T$, $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = T\mathbf{w}$. Assim se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ teremos que $\mathbf{w} \in \operatorname{Nuc} T^2$ mas $\mathbf{w} \notin \operatorname{Nuc} T$. Absurdo pois $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Nuc} T^2$.

Des 4.3: (b) note que traço de AB é igual ao traço de BA. logo, traço de $AB - BA$ é zero e traço de I é n.

Des 4.4: Use o Teorema do Núcleo-Imagem duas vezes.

Des 4.5: Para provar que é diagonal tome B uma matriz com todas colunas iguais a zero exceto a i-ésima, colocando $\mathbf{e}_i$ nesta coluna. Para provar que todos elementos da diagonal são iguais considere B igual a uma permutação de 2 colunas da matriz identidade.

Des 4.6: Seja P a matriz cujas colunas são a base β. Então $AP = PA$ para toda P inversível. Veja o exercício anterior.

Des 4.7: $BA^2 = (BA)A = I$, logo A é invertível e $A^{-1} = BA$.

Des 4.8: Observe que $J_n^2 = nJ_n$. Assim,
$(I - \frac{J_n}{n+1})(I - J_n) = I + \frac{J_n}{n+1}(-n-1) + J_n = I.$

Des 4.9: $A+B = M$ é inversível se, e somente se, (multiplique tudo por A^{-1}) $I+BA^{-1}$ é invertível.

Des 4.10: (a) Note que $T(I) = IB - BI = B - B = 0$, independentemente de B. Logo, $I \in \text{Nuc}(T)$. (b) 1ª parte (se): suponha que B possui inversa. Seja $A \in \text{Nuc}(S)$. Então $S(A) = BA = 0$. Multiplicando-se por B^{-1} dos dois lados, $A = B^{-1}BA = B^{-1}0 = 0$. Logo $\text{Nuc}(S) = \{0\}$. 2ª parte (somente se): suponha que B não possui inversa. Logo existe $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Seja $A = [\mathbf{v} \cdots \mathbf{v}]$. Então $S(A) = BA = 0$ e $0 \neq A \in \text{Nuc}(S)$.

Des 4.11: (a) Defina $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $T_1(x, y) = x$ e $T_2(x, y) = y$. Verifique que são LIs. Dada T qualquer defina $a = T(\mathbf{e}_1), b = T(\mathbf{e}_2)$. Então $T(x, y) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = aT_1(x, y) + bT_2(x, y)$. Logo $T = aT_1 + bT_2$. A dimensão deste espaço é 2.

(b) Defina $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por:
$T_{11}(x, y) = (x,\ 0)$, $T_{12}(x, y) = (0,\ x)$,
$T_{21}(x, y) = (y,\ 0)$, $T_{22}(x, y) = (0,\ y)$. Verifique que são LIs. Dada T qualquer defina $(a, b) = T(\mathbf{e}_1), (c, d) = T(\mathbf{e}_2)$. Então
$T(x, y) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = x(a, b) + y(c, d) = a(x, 0) + b(0, x) + c(y, 0) + d(0, y) =$
$aT_{11}(x, y) + bT_{12}(x, y) + cT_{21}(x, y) + dT_{22}(x, y)$. Logo $T = aT_{11} + bT_{12} + cT_{21} + dT_{22}$. A dimensão deste espaço é 4.

Des 4.12: (a) Como $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) = 4$, o conjunto $\{I, T, T^2, T^3, T^4\}$, que possui 5 elementos, é LD. Portanto existe uma combinação linear não-trivial deles que vale $\mathbf{0}$.

(b) Generalizando o argumento anterior, como $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) = n^2$, o conjunto $\{I, T, T^2, \ldots, T^{n^2}\}$, que possui $n^2 + 1$ elementos, é LD. Portanto existe uma combinação linear não-trivial deles que vale $\mathbf{0}$.

Des 4.14: Sejam $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base de U e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ base de V. Pelo Lema 4.4 da p.94, para definir $T_{ij} \in \mathcal{L}(U; V)$ basta definir valores nos elementos da base de U. Assim definimos $T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{v}_j; & \text{para } i = k; \\ \mathbf{0}; & \text{caso contrário} \end{cases}$. Como $T(\mathbf{u}_k) \in V$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é base de V, existem $a_{kj} \in \mathbb{R}$ tais que $T(\mathbf{u}_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\mathbf{v}_j$. Agora defina $S \in \mathcal{L}(U; V)$ por $S = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}T_{ij}$. Agora, $S(\mathbf{u}_k) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \sum_{j} a_{kj}\mathbf{v}_j = T(\mathbf{u}_k)$ para todo k. Como S e T são lineares e assumem mesmo valor nos elementos da base, $S \equiv T$. Logo $\{T_{ij};\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ gera o espaço $\mathcal{L}(U; V)$. Pode-se provar que T_{ij} é LI no espaço das TLs. Como são nm $T_{ij}'s$, a dimensão é nm.

Des 4.15: Veja `Wikipedia` em `SVD_decomposition`.

A.5 Produto Interno

A.5.1 Exercícios de Fixação

Fix 5.1: (a) 2; (b) 1; (c) $\sqrt{23}$. (d) $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ ou $(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$.

Fix 5.2: (a) Falso, pois os vetores podem não ser unitários; (b) verdadeiro, basta dividir pela norma; (c) verdadeiro; (d) verdadeiro; (e) falso, $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$.

Fix 5.3: (a) $y = 0$; (b) $y = -x$; (c) plano xz; (d) eixo x.

Fix 5.4: (a) $\text{Nuc}(A^T)$. (b) $\geq$. (c) $P_W\mathbf{v}$.

Fix 5.5: (E).

Fix 5.6: $d(A\mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq d(A\mathbf{x}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x}$.

Fix 5.7: (a) P_H. (b) P_H. (c) P_H. (d) P_H. (e) I. (f) R_H. (g) 0.

Fix 5.8: (a) $P(x, y, z) = (0,\ y,\ 0)$;
(b) $P(x, y, z) = (x,\ y,\ 0)$;
(c) $P(x, y, z) = (x,\ -y,\ z)$;

[1]02.out.2012 23h

Fix 5.9: (A)

Fix 5.10: (a) $H^\perp$; (b) H;

Fix 5.11: (a) $T=0$; (b) $T=I$; (c) $T=-I$.

A.5.2 Problemas

Prob 5.1: (a) Não. (b) Sim.

Prob 5.2: $\left\|\begin{bmatrix}4\\3\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\-1\\2\end{bmatrix}\right\| = 3\sqrt{10}$

Prob 5.3: (a) $(2,\ 3)$; (b) $(1,\ -1,\ 1)$; (c) $S^\perp = \operatorname{span}\{(5,\ 1,\ -8)\}$ (d) Definindo-se

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&1&2\\-2&1&2\\1&0&-3\\-1&2&-5\end{bmatrix},$$

temos $\operatorname{Im}(A)=H$ e portanto $H^\perp = (\operatorname{Im}(A))^\perp = \operatorname{Nuc}(A^T)$. Uma base para este espaço é

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\-3\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Prob 5.4: (a) $P(x,y,z,w)=$ $=(x-z)/2(1,\ 0,\ -1,\ 0)=(x-z,\ 0,\ z-x,\ 0)/2$. (b) Como $R=2P-I$, $R(x,y,z,w)=(-z,-y,-x,-w)$.

Prob 5.5: (a) Veja Observação 5.8 da p.150: $\begin{bmatrix}4/5&-2/5\\-2/5&1/5\end{bmatrix}$.

(b) Calcule a projeção P na reta (veja Observação 5.8 da p.150) e depois a reflexao $R=2P-I$: $\begin{bmatrix}4/5&-3/5\\-3/5&-4/5\end{bmatrix}$;

(c) $T(x,y,z)=((x+z)/2,y,(x+z)/2)$. Como o plano é gerado por $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$, a direção $(1,0,-1)$ é perpendicular ao plano.

Sol1: A projeção na direção $(1,0,-1)$ é (veja Observação 5.8 da p.150) $S(x,y,z)=((x-z)/2,0,(z-x)/2)$. Como queremos projetar na direção ortogonal, $T=I-S$, obtendo resposta.

Sol2: Assim $T(1,0,1)=(1,0,1)$ e $T(0,1,0)=(0,1,0)$. Também $T(1,0,-1)=0$. Como sabemos T em três vetores LIs, podemos calcular T.

Prob 5.6: Como $(0,1,0)$ é perpendicular a $(1,0,1)$, o eixo de rotação, basta calcular o ângulo entre $(0,1,0)$ e $(-1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$. Como o produto escalar é igual a zero, a rotação é de $90°$.

Prob 5.7: $a=0,960$ e $b=0,100$.

Prob 5.8: $y=19/20x+67/40$.

Prob 5.9: $P_H\mathbf{v}=\begin{bmatrix}4\\3\\3\\-2\end{bmatrix}$ e $R_H\mathbf{v}=(2P_H-I)\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\5\\3\\-5\end{bmatrix}$.

Prob 5.10:

$$\frac{2}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\\1\end{bmatrix}-\frac{7}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\\-2\\3\end{bmatrix}$$

Prob 5.11: (a) $\left\{\begin{bmatrix}5\\-3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$; (b) $\begin{bmatrix}2\\2\\5\\5\end{bmatrix}$

A.5.3 Extras

Ext 5.1: (a) $(x,y,z,w)\in H^\perp$ se $\begin{cases}x-3y+z+2w=0\\2x-y+2z=0\\-4x-3y-4z+4w=0\end{cases}$. Base (resolva sistema): $\{(2,4,0,5),(-1,0,1,0)\}$. (b) Uma solução é resolver o sistema e depois determinar o complemento ortogonal. Mais direto é observar que $(x,y,z)\in H$ se é perpendicular a $(1,-1,-1)$ e $(2,-1,1)$. Assim base:$\{(1,-1,-1),(2,-1,1)\}$. (c) o plano $2x-y+3z=0$. Base: $\{(1,2,0),(0,3,1)\}$.

Ext 5.2: (a) $\begin{bmatrix}4/5&2/5\\2/5&1/5\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}3/5&4/5\\4/5&-3/5\end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4&3\\3&4\end{bmatrix}$ (e) projeção é $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, a rotação é $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$, compondo obtemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$.

(f) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

(g) O plano perpendicular ao eixo de rotação é $x + y + z = 0$. Tomamos uma base ortonormal deste plano: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ 1)\}$ Completamos esta base com $1/\sqrt{3}(1,\ 1,\ 1)$ para obter base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Definimos $\beta = \{\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ 1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)\}$ Nesta base a rotação será:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $[I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}$ é igual as colocar os vetores de β em colunas. A inversa desta matriz é $[T]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$, que pode ser obtida transpondo a matriz anterior pois ela é ortogonal. Com isto podemos calcular $[T]_\epsilon = [I]_{\varepsilon\leftarrow\beta}[T]_{\beta\leftarrow\beta}[I]_{\beta\leftarrow\varepsilon}$. Deixe somente indicado.

Ext 5.3: Se $\mathbf{u} \in H$ e $\mathbf{v} \in H^\perp$, então $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v}\, \rangle = 0$. Se $\mathbf{w} \in H \cap H^\perp$, então $\mathbf{w} \in H$ e $\mathbf{w} \in H^\perp$, de forma que $\langle \mathbf{w} \,|\mathbf{w}\, \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 = 0$.

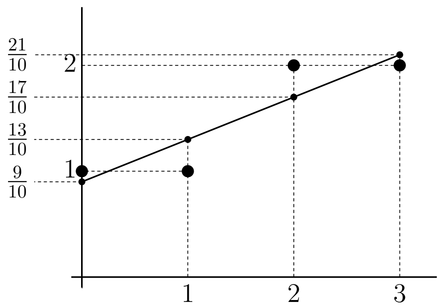
Ext 5.4: (a) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. (b) $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ext 5.6: (a) $(-3, 5)$; (b) $(3, 5)$; (c) $\operatorname{span}\{(3, 5)\}$; (d) $\mathbf{0}$;

Ext 5.7: Se $\mathbf{w} = \sum a_j\mathbf{v}_j$, fazendo produto interno com $\mathbf{v}_i$ obtemos que $\langle \mathbf{w} \,|\mathbf{v}_i\, \rangle = 0 = a_i\|\mathbf{v}_i\|^2$. Assim $a_i = 0$ para todo i e portanto $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Ext 5.8: Prove por indução pois $\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_{n-1}$ é ortogonal a $\mathbf{v}_n$.

Ext 5.9: (a) $y = \frac{4}{10}x + \frac{9}{10}$.
(b)



(c) $\begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{17}{10} \\ \frac{21}{10} \end{bmatrix}$

Ext 5.10: Vamos determinar m do sistema:

$$\begin{cases} 8m &= 4 \\ 16m &= 9 \\ 24m &= 13 \\ 32m &= 17 \\ 40m &= 20 \end{cases}$$

Projetando no subespaço linear obtemos:
$\frac{\langle (4,9,13,17,20) | (8,16,24,32,40) \rangle}{\langle (8,16,24,32,40) | (8,16,24,32,40) \rangle} \cdot (8, 16, 24, 32, 40)$

$$= \frac{1832}{3520} \cdot (8, 16, 24, 32, 40)$$

e $m \approx 0.52$.

Ext 5.11: $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ext 5.12: (a) $1/4$; (b) $1/6$; (c) $\sqrt{3}/3$.

A.5.4 Desafios

Des 5.1: (a) Se P é projeção ortogonal em H, seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ base de H e $\{\mathbf{v}_{k+1} \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de $H^\perp$. Complete argumento. (b) Sejam $H = \operatorname{Nuc}(P - I)$ e $W = \operatorname{Nuc} P$. Prove que $H = \operatorname{Im} P$ (De fato $\mathbf{w} \in \operatorname{Nuc}(P - I)$ implica que $P\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Logo $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} P$. Por outro lado, se $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} P$, $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$. Logo, $P\mathbf{w} = P^2\mathbf{v} = P\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Logo $(P - I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Assim $\mathbf{w} \in H$.) Pelo Teorema 4.12 da p.102 (TNI) $\dim H + \dim W = n$. Tome bases de H e W e complete o argumento. (c) Deixamos com o leitor.

Des 5.2: Se $\mathbf{v} = \sum a_i\widehat{\mathbf{u}}_i$, $\mathbf{v} \in H^\perp$ se, e somente se, (temos que resolver um sistema linear — a primeira equação é $a_2 + 2a_3 + q_4 + a_5 = 0$, obtida calculando $\langle \mathbf{v} \,|\widehat{\mathbf{u}}_1\, \rangle$) — e obter que
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (s, -2t, t, 0, 0)$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Assim $H^\perp = \operatorname{span}\{\widehat{\mathbf{u}}_1, -2\widehat{\mathbf{u}}_2 + \widehat{\mathbf{u}}_3\}$

Des 5.3: (a) simetria segue que traço(A) = traço(A^T) e portanto traço(A^TB) = traço(B^TA). Linearidade segue de traço$(A+B)$ = traçoA + traçoB. traço$(A^TA) \geq 0$ segue por (b). (c) subespaço da matrizes com **todos** elementos da diagonal nulos. (d) subespaço das matrizes triangulares inferiores estritas (todos elementos da diagonal nulos).

Des 5.5: (a) Tomando $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{z}$ e usando linearidade, $g(\mathbf{0}, \mathbf{z}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{z}) + g(\mathbf{0}, \mathbf{z})$. Assim $0 = g(\mathbf{0}, \mathbf{z})$. (b) Usando simetria temos que (b) $g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = g(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u})$. Pela linearidade, é igual a $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{w}, \mathbf{u})$. Agora aplique simetria em cada termos. (c) Siga a dica e use linearidade: dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = \sum a_i\mathbf{e}_i$. (d) Segue da simetria de g.

Des 5.6: (a) Se $\mathbf{v} = (d, e)$ é a direção de projeção, pela Observação 5.8 da p.150, $P_{\operatorname{span}\{\mathbf{v}\}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|}$. Agora $\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & de \\ de & e^2 \end{bmatrix}$. Assim $a = d^2/\|\mathbf{v}\|^2$, $c = e^2/\|\mathbf{v}\|^2$ e $b = de/\|\mathbf{v}\|^2$. (b) Pela Observação **??** da p.**??** $R = 2P - I$, P

a matriz de (a) e I a identidade. Faça as contas!

Des 5.7: Seja $\mathbf{v} \in H$. Se $\mathbf{w} \in H^\perp$, então $\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{u} \in H$. Logo $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in H^\perp$. Logo $\mathbf{v} \in (H^\perp)^\perp$.

Por outro lado seja $\mathbf{v} \in (H^\perp)^\perp$. Complete o argumento.

Des 5.11: (a) Seja $\mathbf{v}_1$ o eixo de rotação e $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ base ortogonal do complemento ortogonal de $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}$. Assim $R\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ e R vai agir em $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ como uma rotação. Assim defina P como sendo uma matriz com $\mathbf{v}_i$ nas colunas.

(b) Faça as contas com a matriz $P^{-1}RP$.

Des 5.12: Basta pensar que $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ (vetores da base canônica) e ver Exemplo 4.9 da p.96.

A.6 Determinantes

A.6.1 Exercícios de Fixação

Fix 6.1: (a) V: (b) F, pode ser uma múltipla da outra; (c) F, $\det(B) = -\det(A)$. (d) F, pode ser negativo (< 0).

Fix 6.2: (a) -2; (b) $-1/2$; (c) -32.

Fix 6.3: (a) pode ser $=$ (se $A = B = 0$) ou $\neq$ (se $A = B = I$); (b) $=$; (c)-30.

Fix 6.4: (a) 0; (b) $4!$.

Fix 6.5: (a) 14; (b) 21; (c) -7; (d) 56. (e) 42 (área de $A(Q)$), 6/7 (área de $A^{-1}(Q)$: note que fazendo $\mathbf{u} = A\mathbf{w}$, $\{\mathbf{w};\ A\mathbf{w} \in Q\} = \{A^{-1}\mathbf{u};\ \mathbf{u} \in Q\}$). (f) Como $\det \neq 0$, vetores são LIs. Assim $a = b = c = 0$ e portanto $a + b + c = 0$.

Fix 6.6: (a) uma única solução; (b) uma única solução; (c) nenhuma ou infinitas soluções; (d) infinitas soluções;

Fix 6.7: (a) múltiplo de; (b) pertence ao plano gerado por v e w; (c) LDs; (d) LDs.

Fix 6.8: (a) $\neq 0$; (b) $= 0$; (c) $\neq 0$.

Fix 6.9: (a) $\neq 0$; (b) $= 0$; (c) 4; (d) < 4.

Fix 6.10: $\mathbf{v}$ é solução não-trivial de $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Fix 6.11: (a) 2; (b) 2; (c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

[0]Versão 03.out.2012 09h

A.6.2 Problemas

Prob 6.1: (a) -16; (b) 12.

Prob 6.2: $\det(A) - (-4) = \det(B) = -36$. Logo, $\det(A) = 9$.

Prob 6.3: (a) -1 e 6; (b) usando matriz em blocos, $1, 2, 3$.

Prob 6.4: 4π.

Prob 6.5: (a) triangular inferior em blocos: $(9 - 8)(14 - 1) = 13$; (b) troque linhas e obtenha triangular superior em blocos: $(2)(3)(6-1) = 30$. (c) $(9 - 8)(-1) = -1$.

Prob 6.6: 62.

Prob 6.7: -1.

Prob 6.8: (a) Troque l_1 com l_4 e l_2 com l_3. Agora a matriz resultante é diagonal e o determinante é o mesmo pois foram duas trocas. Assim o determinante é o produto dos elementos da diagonal da nova matriz: $abcd$.

(b) Troque as linhas até obter matriz triangular superior. A primeira linha terá a_n, ..., a última linha a_1. Como troca de linha altera somente o sinal do determinante, $|\det M| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|$.

Prob 6.9: (a) Calcule AA^{-1} e verifique que o resultado é I. (b) O fator $1/(ad - bc)$ sai do determinante como $1/(ad - bc)^2$ pois A é 2×2, obtendo o resultado correto: $\det(A^{-1}) = (ad - bc)/(ad - bc)^2 = ad - bc$.

Prob 6.10: (a) Mostrar que 2 não é suficiente é fácil. Para mostrar que é 3 coloque-os na mesma linha ou coluna. (b) n.

Prob 6.11: Subtraia a primeira linha das outras e reduza a determinante 2×2. Considere $v = (x, y)$ O determinante é zero se, e somente se, os vetores $v_1 - v$ e $v_2 - v$ são colineares.

A.6.3 Extras

Ext 6.1: (a) $-3 \cdot 2^n$; (b) $-3 \cdot 3^n$; (c) $(-3)^5/3^n$;

Ext 6.2: (a) não possui; (b) nada podemos afirmar.

Ext 6.3: Não. Para preservar área, basta que $\det T = 1$. Considere $T(x, y) = (x/2, 2y)$. Embora $\det T = 1$, comprimentos na direção x são reduzidos à metade, na direção y duplicados.

Ext 6.4: Calculando o módulo do determinante da matriz que em cada coluna tem os vetores

$(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ e $(2,2,-1)$ obtemos que o volume é 27.

Ext 6.5: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como C é um cubo de aresta 3, $\mathrm{vol}(C) = 3^3 = 27$. Logo, $\mathrm{vol}(T(C)) = \det(T)\mathrm{vol}(C) = (2)(27) = 54$.

Ext 6.6: $T(x,y,z) = (ax, by, cz)$ e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Logo $\mathrm{vol}(E) = \mathrm{vol}(T(B)) = \det(T)\mathrm{vol}(B) =$
$= (abc)(4/3\pi)$.

Ext 6.7: (a) 84. (b) -14.

Ext 6.8: (a) 2 e 5;

Ext 6.9: Se $x = \det(A)$, então $x^2 = x$; raízes são 0 ou 1.

Ext 6.10: Calculando o determinante dos dois lados concluímos que A é invertível. Multiplicando os dois lados por A^{-1} concluímos que $B = A^{-1}$. Dai segue o resultado.

Ext 6.11: Se $x = \det(A)$, então $x^k = 1$; raíz 1 se k par, 1 e -1 se k ímpar.

Ext 6.12: (a) Como $n = 3$, $\det(-I) = -1$ e $\det(A^2) = \det(-I) = -1 = \det(A)^2$. Logo $\det(A) = \pm i$, o que é impossível para uma matriz com entradas reais. (b) basta fazer a conta.

Ext 6.13: (a) Se $x = \det(S)$, então $x = (-1)^n x$; se n é ímpar obtemos $x = -x$, o que implica $x = 0$. (b) $S = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$, $\det S = b^2 \neq 0$.

Ext 6.14: Se $x = \det(N)$, então $x^k = 0$; raíz 0. Logo $\det(N) = 0$, o que implica que N não é invertível.

Ext 6.15: Se $x = \det(Q)$, então $x^2 = 1$; raízes são 1 ou -1.

Ext 6.17: $A = D = I$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como 1a linha de M é igual a 4a linha, $\det M = 0 \neq \det A \det D - \det B \det C = (1)(1) - (0)(0) = 1$.

Ext 6.18: Troque as linhas de cima com a debaixo. O determinante é o mesmo a menos de sinal. Como todas são do mesmo tamanho, o sinal final é o mesmo. A matriz agora será bloco triangular da forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ X & I \end{bmatrix}$, com determinante igual a $\det(A)$.

Ext 6.19: Como $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

Ext 6.20: $\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(D)$ pois $\det(P)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1}) = \det(I) = 1$. Como D é diagonal, $\det(D) = n!$ (produto dos elementos da diagonal). Como $\det(A^k) = (\det(A))^k = (n!)^k$.

Ext 6.21: (a) de forma geral não; (b) sim; (c) sim.

Ext 6.22: Sim, pois se $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, então $\det(A) \neq 0$, o que implica que A é invertível.

Ext 6.23: $(-1)^{(n+1)}$.

Ext 6.24: Semelhante ao Problema 6.11 da p.189. O determinante é zero se, e somente se, os vetores $v_1 - v$, $v_2 - v$ e $v_3 - v$ são coplanares.

Ext 6.25: (a) Subtraia linhas e reduza a determinante 2×2;

Ext 6.26: (a) λ^n; (b) $\lambda^n \det(A)$.

A.6.4 Desafios

Des 6.2: (a) Se é LD, então existe a_i, $\sum a_i f_i(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Derivando k vezes obtemos $\sum a_i f_i(k)(x) = 0$. Definindo $\mathbf{v}_i(x) = (f_i(x), f_i'(x), \ldots, f_i^{(n-1)}(x))$, $\sum a_i \mathbf{v}_i(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Assim $\{\mathbf{v}_1(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x)\}$ é LD para todo x. Assim $\det = 0$ para todo x.

(b) contrapositiva de (a). (c) faça as contas. (d) Não são LIs pois uma não é múltipla da outra. Se é LD, wrosnkiano é zero. Isto NÃO implica que wronskiano igual a zero implica em LD.

Des 6.3: Note que estamos substituindo linha por sua soma com múltiplo de outra, que não altera determinante. Obtemos $\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{u}^T \end{array}\right]$. Como é bloco-triangular superior obtemos o resultado.

Des 6.5: Escalone a matriz e fatore os termos $(b-a)$, $(c-b)$ a cada etapa.

Des 6.6: Troque a última linha com a 1a e escalone matriz.

Des 6.7: Aplicando a algoritmo de cálculo com eliminação de Gauss, somente racionais entrarão em cada etapa, inclusive na final, no produto de elementos da diagonal.

Des 6.8: Cada coluna é um vetor cujo máximo da norma é $\sqrt{k^2 + \cdots + k^2} = k\sqrt{n}$. O máximo volume é o produto do comprimento de cada aresta.

Des 6.9: (a) Note que $(a, c, 0, \ldots, 0) = (a, 0, \ldots, 0) + (0, c, 0, \ldots, 0)$.

Vamos usar linearidade do determinante na primeira coluna. Assim $\det A_{n+1} = \det \left[\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & A_n \end{array}\right] +$ $\det \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ \hline & & A_{n-1} & \end{array}\right]$. Usando estrutura de blocos obtemos o resultado.

Des 6.11: Se $\text{posto}(A) = k$, então A possui k colunas LIs. Seja B a submatriz com estas colunas. Pelo Lema 4.15 da p.104, B possui k linhas LIs. Seja C esta submatriz (que é submatriz de A). Como C é quadrada com linhas (e colunas) LIs, $\det C \neq 0$. Este é o maior inteiro pois de forma geral se C é uma submatriz de A, então $\text{posto}(C) \leq \text{posto}(A)$ (senão teríamos mais vetores LIs numa submatriz). Deixamos para o leitor provar a volta.

Des 6.12: São 6 matrizes. Sejam $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ base canônica e $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Se 1a coluna é $\mathbf{e}_1$: 2a coluna é $\mathbf{e}_2$ ou $\mathbf{e}_{12}$. Se 1a coluna é $\mathbf{e}_2$: 2a coluna é $\mathbf{e}_1$ ou $\mathbf{e}_{12}$. Se 1a coluna é $\mathbf{e}_{12}$: 2a coluna é $\mathbf{e}_1$ ou $\mathbf{e}_2$.

A.7 Autovetores e Diagonalização

A.7.1 Exercícios de Fixação

Autovalores e Autovetores

Fix 7.1: (a) sim; (b) não; (c) não; (d) sim;

Fix 7.2: (a) Não; (b) Sim, autovalor 0 (zero).

Fix 7.3: (a) Falso pois para ser autovalor o autovetor tem que ser não-nulo; (b) Falso pois autovetor tem que ser não-nulo. (c) Falso, rotações em $\mathbb{R}^2$. (d) Verdadeiro, autovalor 0. (e) Verdadeiro, pois como 0 não é autovalor a matriz A é invertível.

Fix 7.4: 9.

Fix 7.5: (a) 2; (b) 3. (c) não é;

Fix 7.6: (a) $= 0$; (b) $= 0$; (c) > 0;

Fix 7.7: é.

Fix 7.8: (a) R, P; (b) R; (c) P; (d) U.

Fix 7.9: (a) 3; (b) 0; (c) 1.

[0]Versão 03.out.2012 11h

Diagonalização

Fix 7.10: (a) 0; (b) todos os vetores não-nulos. (c) é.

Fix 7.11: (a) verdadeiro. (b) falso, pode ser diagonalizável; Um exemplo com somente um autovalor é a matriz identidade, cujo único autovalor é 1 e é diagonalizável. (c) verdadeiro: soma da dimensão dos autoespaços é $4 < 6$.

Fix 7.12: não é pois dimensão da soma dos autoespaços é $1 < 3$.

Fix 7.13: (a) $-1, 1, 2$; (b) pode ser diagonalizada; distintos.

Fix 7.14: (a) Não, A é necessariamente diagonalizável pois a soma das dimensões dos autoespaços é 4. (b) T não é diagonalizável pois a soma das dimensões dos autoespaços é 4 que é menor que 5.

Fix 7.15: Os autovalores são as entradas de D, ou seja, 1 e 2.

Uma base para o autoespaço associado ao autovalor 1 é obtida tomando-se as colunas de M associadas ao autovalor 1: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Da mesma forma, uma base para o autoespaço associado ao autovalor 2 é obtida tomando-se as colunas de M associadas ao autovalor 2: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

A.7.2 Problemas

Autovalores e Autovetores

Prob 7.1: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base. $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 \\ -30 \end{bmatrix}$, por exemplo, são autovetores distintos.

Prob 7.2: (a) autovalor -5 com autoespaço $\langle(-1, 1)\rangle$ e autovalor 9 com autoespaço $\langle(1, 1)\rangle$. (b) autovalor -1 com autoespaço $\langle(1, 0, 0)\rangle$, autovalor 1 com autoespaço $\langle(1, 0, 1), (0, 1, -1)\rangle$. (c) autovalor 1 com autoespaço $\langle(1, 0, 0, -1)\rangle$ e autovalor 0 com autoespaço $\langle(0, 1, 0, 0)\rangle$.

Prob 7.3:

$$\left[\begin{array}{c|c} A-5I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\text{se } h=6) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\text{se } h\neq 6) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Autoespaço bidimensional $\Leftrightarrow$ duas variáveis livres $\Leftrightarrow$ $h=6$.

Prob 7.4: (a) Como $T(1,-2) = -1/2(1,-2) = (-1/2, 1)$ e $T(0,1) = 2(0,1) = (0,2)$.

Como $(1,0) = (1,-2) + 2(0,1)$, $T(1,0) = (-1/2, 5)$. Portanto, $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Logo $T(x,y) = (-x/2, 5x+2y)$

(b) $T(1,-1,1) = 3(1,-1,1)$, $T(1,0,1) = 3(1,0,1)$ e $T(0,1,1) = 0$. Desenvolvendo estes dados obtemos que $T(x,y,z) = 3x, 3x+3y-3z, 3x)$.

Prob 7.5: (a) como o núcleo é uma reta, 0 é autovalor também, resultando em três autovalores distintos, o que é impossível em dimensão 2;

(b) pelo teorema do núcleo-imagem T deve ser injetiva também, implicando que 0 não pode ser autovalor;

(c) como $(5,7,9) = (1,2,3) + (4,5,6)$,
$T(5,7,9) = T(1,2,3) + T(4,5,6) =$
$= (1,2,3) + 2(4,5,6) = (9,12,15) \neq 3(5,7,9)$;

Prob 7.6: (a) 0 e 1; $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 1$, $\dim \operatorname{Nuc}(T+I) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T-I) = 2$.

(b) 1 e -1. $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 0$, $\dim \operatorname{Nuc}(T+I) = 1$, $\dim \operatorname{Nuc}(T-I) = 2$.

Prob 7.7: (a) $(2,4,2)$; (b) 1 pois a imagem tem pelo menos dimensão 2, igual a dimensão do autoespaço.

Prob 7.8: O eixo será um autovetor associado ao autovalor 1: $(-1,1,-1)$.

Prob 7.9: Reflexão em torno do plano $x+y=0$. Solução: Achando os autovalores e autovetores, obtemos equação característica $(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0$. Para o autovalor 1 obtemos o autoespaço $x+y=0$ (de dimensão 2); para autovalor -1 obtemos como autoespaço a solução do sistema $\{\ x-y=0//z=0$, cujo espaço é gerado por $(1,1,0)$. Note que esta direção é perpendicular ao plano do autoespaço do autovalor 1.

Os vetores do plano $x+y=0$ não são alterados pela transformação (plano de reflexão) e os da direção $(1,1,0)$ são multiplicados por -1. Logo TL é reflexão em torno do plano $x+y=0$.

Prob 7.10: Nos dois casos $\lambda = -9$.

Diagonalização

Prob 7.11: (a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-(-1))(\lambda-1)$.

O autoespaço associado ao autovalor -1 é o conjunto-solução de

$$\left[\begin{array}{c|c} A-(-1)I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Uma base é $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

O autoespaço associado ao autovalor 1 é o conjunto-solução de

$$\left[\begin{array}{c|c} A-I & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Uma base é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

Assim, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(b) Autovalores: 0 e 1, com polinômio característico $\lambda(1-\lambda)^2$. Associado ao autovalor 0 o sistema $\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, com autoespaço gerado por $(0,1,-1)$; associado ao autovalor 1 o sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ com autoespaço gerado por $(0,0,1)$. Portanto NÃO existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 2 e não 3) e não é diagonalizável;

(c) Autovalores: 2 e 4, com polinômio característico $(4-\lambda)(2-\lambda)^2$. Associado ao autovalor 2 o sistema $\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$, com autoespaço gerado por $(1,1,0)$; associado ao autovalor 4 o sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ com autoespaço gerado por $(0,0,1)$. Portanto NÃO existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 2 e não 3) e não é diagonalizável;

(d) Autovalores: 1 e -1, com polinômio característico $(1-\lambda)^3(1+\lambda)$. Associado ao autovalor 1 o sistema $\left\{\ y-z=0\right.$, com autoespaço gerado por $(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)$; associado ao autovalor -1 o sistema $\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ com autoespaço gerado por $(0,1,-1,0)$. Portanto existe base de autovetores (soma das dimensões dos autoespaços é 4) e é diagonalizável. Tome $\beta=\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)$ $,(0,1,-1,0)\}$ e $[T]_\beta=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$.

Prob 7.12: Associado ao autovalor 0, $(1,-1,0)$, associado ao autovalor 1 o espaço gerado por $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$. (a) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prob 7.13: (a) Da equação obtemos que $(1,-2,-1)$ é ortogonal ao plano de projeção. Resolvendo a equação obtemos $(1,1,-1)$ e $(1,0,1)$. Como é projeção cada uma destas direções é um autovetor e forma base do $\mathbb{R}^3$. Defina P como sendo uma matriz com cada autovetor numa coluna e D com autovalores 0 e 1. (b) A base de $H^\perp$ foi calculada no Exemplo 5.6 da p.142: $(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)$. Assim $D=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo $T=PDP^{-1}$.

Prob 7.14: Calculamos resolvendo o sistema $x+y-z=0, x+z=0$ que $\mathbf{w}=(1,-2,-1)$. Como são autovetores LIs, $\beta=\{(1,1,-1)/\sqrt{3}$, $(1,0,1)/\sqrt{2}$, $(1,-2,-1)/\sqrt{6}\}$

Aplicações

Prob 7.15: (a) Autovalor 1 com autovetor $(1,1)$, autovalor 2 com autovetor $(0,1)$. Assim tomando $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. $A^{10}=P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$.

(b) $A=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

(c) Diagonalize A e calcule $B=P\sqrt{D}P^{-1}$. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) Autovetores de A: $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,-5,1)$. Defina $X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y=D^{99}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{99} \end{bmatrix}$, $A^{99}=XYX^{-1}$

Prob 7.16: (a) autovalor $1/2$ com autovetor $(-1,1)$ e autovalor 1 com autovetor $(1,3/2)$. Definindo $A=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1/2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$, calculamos $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, $A=PDP^{-1}$.

(b) Como $\begin{bmatrix} r_{10} \\ m_{10} \end{bmatrix}=A^{10}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, calculamos

$$A^{10}=P\begin{bmatrix} 1/2^{10} & \\ & 1 \end{bmatrix}P^{-1}=$$

$$=\frac{1}{5\cdot 2^{10}}\begin{bmatrix} 2051 & 2046 \\ 3069 & 3074 \end{bmatrix}.$$

Logo $r_{10}=4097/10240\approx 40\%$.

(c) Como $\lim_{k\to\infty}A^k=P\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$. Logo, se inicialmente são r_0 republicanos e m_0 monarquistas, serão $0.4(r_0+m_0)$ republicanos e $0.6(r_0+m_0)$ monarquistas, isto é, 40% republicanos e 60% monarquistas independente do valor de r_0 e m_0.

A.7.3 Extras

Autovalores e Autovetores

Ext 7.1: (a) talvez; (b) sim.

Ext 7.2: (a) $2\pm i$; (b) $0,(0,0,1)$, $1,(1,0,0)$ e $-1,(1,1,1)$.

Note que em (c) e (d) não precisa calcular explicitamente as TLs.

(c) o vetor $(3,-2,1)$ é perpendicular ao plano de reflexão. Logo é autovetor associado ao autovalor -1. Por outro lado, podemos obter base do plano $(1,0,-3)$ e $(0,1,2)$, que são autovetores associados ao autovalor 1. (d) Como é projeção ortogonal em reta, toda direção perpendicular ao vetor $(1,-1,0)$ é levado em zero. Portanto os vetores (x, y, z) satisfazendo $x - y = 0$ são levados no zero. Assim (x, x, z), $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são levados em zero. Assim autovalor 0; autovetores $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ e autovalor 1, autovetor $(1, -1, 0)$.

(d) autovalor 3 com autoespaço $\langle(1, 0, 0)\rangle$, autovalor 2 com autoespaço $\langle(0, -2, 1)\rangle$, e autovalor 1 com autoespaço $\langle(0, -1, 1)\rangle$. (f) $\lambda = 0$ com com $(1, 0)$. (g) $\lambda = 2$, $(1, 0, 0)$. (h) autovalor 0 na direção $(1, 2, -1, 1)$ e autovalor 1 no hiperplano perpendicular a $(1, 2, -1, 1)$. (i) autovalor 1 na direção $(1, 1, -1)$.

Ext 7.3: (a) Monte a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e faça as contas. (b) e (c): Escreva $A = (a_{ij})$ e faça as contas.

Ext 7.4: Como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\det(A - 0I) = \det(A) = p(0) = 4$.

Ext 7.5: (a) $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $T = PDP^{-1}$.

(c) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $T = PDP^{-1}$.

Ext 7.6: (a) Como $(1, -1, 1, 0) = -(0, 1, -1, 1) + (1, 0, 0, 1)$, pertence ao núcleo também; não pode estar associado ao autovalor -3;

(b) como $(1, 0, 1)$ pertence ao plano $x - y + z = 0$, $T(1, 0, 1) = -(1, 0, 1) \neq (0, 1, 0)$.

Ext 7.7: (a) 0 e 1. $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 1$, $\dim \mathrm{Nuc}(T + I) = 0$, $\dim \mathrm{Nuc}(T - I) = 1$.

(b) 1 e -1. $\dim \mathrm{Nuc}(T) = 0$, $\dim \mathrm{Nuc}(T + I) = 2$, $\dim \mathrm{Nuc}(T - I) = 1$.

Ext 7.8: Calcule autovalores e autoespaços associados. Plano de projeção/reflexão é autoespaço associado a 1. Projeção tem autovalor 0 e reflexão -1. Rotação ter par de autovalores complexos não-reais.

(a) É rotação. Eixo: $(1, -1, 1)$ com ângulo $120°$. Solução: Para determinar eixo precisamos calcular a direção associada ao autovalor 1. Vamos obter o sistema $\begin{cases} -y = x \\ -z = y \\ x = z \end{cases}$. Resolvendo obtemos $(1, -1, 1)$ como direção do eixo. Para determinar o plano de rotação resolvemos o sistema $\{\ x - y + z = 0$, que é gerado por $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$. Calculando $T\mathbf{u} = (0, 1, 1)$ e $T\mathbf{v} = (-1, -1, 0)$. Determinamos o ângulo fazendo o produto interno: $\cos\theta = \langle \mathbf{u} \,| T\mathbf{u} \rangle / (\|\mathbf{u}\| \|T\mathbf{u}\|) = -1/2$ $\cos\phi = \langle \mathbf{v} \,| T\mathbf{v} \rangle / (\|\mathbf{v}\| \|T\mathbf{v}\|) = -1/2$. Logo o ângulo $\theta = \phi = 120°$. Segue que T é rotação. (b) é projeção ortogonal. (c) é projeção ortogonal. (d) é reflexão. (e) É rotação. Calculando autovetor associado ao 1 determinamos o eixo $(1, 0, -1)$. Com isto determinamos o plano de rotação, que é perpendicular a este eixo: são os (x, y, z) tais que $x - z = 0$. O plano é $\langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$. Aplicando matriz num destes vetores (por exemplo em $(1, 0, 1)$) calculamos o ângulo, que é $90°$.

Ext 7.9: Autovetor $\mathbf{v}$ com autovalor: (a) λ^2;

(b) $1/\lambda$; De fato, seja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ autovetor associado ao autovalor λ. Então $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Como A é invertível, podemos multiplicar à esquerda por A^{-1} ambos os lados da equação, produzindo $A^{-1}A\mathbf{v} = \mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$. Como $\lambda \neq 0$ (pois a matriz é invertível), podemos dividir tudo por λ e obter $A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$.

(c) $\mu\lambda$;

(d) $a\mu + b\lambda$;

Ext 7.10: (a) $\det(PBP^{-1}) =$
$= \det(B)\det(P)\det(P^{-1}) = \det(B)$;
(b) $A^3 = PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1} =$
$= PB(I)B(I)BP^{-1} = PBBBP^{-1}$. (c) o polinômio característico é o mesmo pois
$\det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda I) =$
$= \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) =$
$= \det(P)\det(A - \lambda I)\det(P^{-1}) = \det(A - \lambda I)$.
(d) $w = P^{-1}v$. (e) segue do fato de possuírem o mesmo polinômio característico.

Ext 7.11: (b) $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT\mathbf{u} + bT\mathbf{v} = a\lambda_u\mathbf{u} + b\lambda_v\mathbf{v} = \lambda_u(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\lambda_v/\lambda_u)$

Ext 7.12: Como $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $A^5\mathbf{v} = \lambda^5\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Assim $\lambda^5 = \lambda$. Logo Autovalores reais λ somente podem ser 1, -1 e 0.

Ext 7.13: (a) Seguindo a sugestão, " $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s, \ i = 1, 2, \ldots, n$" equivale a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto s é autovalor.

(b) 0 autovalor pois a matriz é singular. 6 é autovalor pelo item anterior.

Ext 7.14: (a) 1. (b) -1. (c) -9

Ext 7.15: 1 com autoespaço gerado por x e $x^2 + 1$.

Diagonalização

Ext 7.16: $A^8 = PD^8P^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$
$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 3826 & -8925 \\ 1530 & -3569 \end{bmatrix}$

Ext 7.17: (a) $P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$; (b) matriz diagonal $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{bmatrix}$.

Ext 7.18: (a) autovalores complexos dados por $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$, portanto não existe base de autovetores e,portanto, não é diagonalizável;

(b) Não é diagonalizável.

(c) Defina $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Então
$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$.

(d) Defina $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então
$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$.

Ext 7.19: $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Outra opção é ($A$ não é única) tomar
$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ext 7.20: Defina $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Então, $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} P^{-1}$

Ext 7.21: (a) Autovalores são 1 (duplo) e 2. A condição é $a = 0$.

Ext 7.22: (a) $\begin{bmatrix} 0 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\star \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $0 \neq \blacksquare \in \mathbb{R}$.

Ext 7.23: (a) Autovalor 1 com autovetor $(1,2)$ e autovalor $1/10$ com autovetor $(1,-1)$. Defina $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calculando obtemos que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$. Calculando o limite, D matriz com autovalores na diagonal, $D^n \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculando $P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Calculando autovalores e autovetores:
$D = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Resposta: $P \begin{bmatrix} 2^{100} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$.

Ext 7.24: (a) $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $T = PDP^{-1}$.

Ext 7.25: (a) Se $A = PDP^{-1}$, então $A = (\lambda P)D(1/\lambda P^{-1}) = QDQ^{-1}$.

A.7.4 Desafios

Autovalores e Autovetores

Des 7.1: $\langle A\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | A^T\mathbf{v} \rangle =$
$= \mu \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ Como $\lambda \neq \mu$, $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$.

Des 7.2: Autovalores são $a+b$ e $a-c$.

Des 7.3: 0 e traço de A.

Des 7.4: Se T é uma matriz com $\mathbf{v}_i$ em cada coluna, $\det(T - \lambda I) = \det[\mathbf{v}_1 - \lambda \mathbf{e}_1 | \cdots | \mathbf{v}_n - \lambda \mathbf{e}_n]$. Expandindo por linearidade vamos obter soma de termos com nenhum λ, λ^1, λ^2, ..., λ^n. O termo sem lambda tem $\det T$. O com λ^n terá $\det I = 1$ Deixamos para o leitor completar.

Des 7.5: (b) Fatore o polinômio característico em $(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ e coloque $\lambda = 0$.

Des 7.6: Seja $a > 0$ autovalor. $(T^2 - a^2I) = (T - aI)(T + aI)$. Por hipótese $\det(T^2 - a^2I) = 0$. Assim ou $\det(T - aI) = 0$ ou $\det(T + aI) = 0$. Então a ou $-a$ é autovalor.

Des 7.7: $AB\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ com $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Multiplicando por B dos dois lados: $BA(B\mathbf{v}) = \lambda(B\mathbf{v})$. Como

$B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (caso contrário $AB\mathbf{v} = \mathbf{0}$), é autovetor de BA.

Des 7.8: Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ base do autoespaço de dimensão 4 associado ao autovalor 1. Complete a base e defina P como sendo uma matriz com as 4 primeiras colunas $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$, as outras com o resto da base. Agora calcule AP e complete argumento.

Des 7.9: 1 com autoespaço gerado por:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Des 7.10:

Se tivesse, $Tf = \lambda f$, derivando os dois lados, $\lambda f' = f$ e portanto f seria uma exponencial mas como $(Tf)(0) = \int_0^0 f(s)\, ds = 0$, $f \equiv 0$.

Diagonalização

Des 7.11: (a) autovalor $1/2(1 + \sqrt{5})$ com autovetor $1/2(1 + \sqrt{5}, 1)$ autovalor $1/2(1 - \sqrt{5})$ com autovetor $1/2(1 - \sqrt{5}, 1)$. Definindo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & \\ & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calculamos $P^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 \\ -1 & \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$. Logo, $A = PDP^{-1}$.

(b) como $1/2(1 - \sqrt{5}) \approx -0.61$, $\lim_{k\to\infty} (1/2(1-\sqrt{5}))^k = 0$. Assim, de forma aproximada, $D^{50} = \frac{1}{2^{50}}\begin{bmatrix} (1+\sqrt{5})^{50} & \\ & 0 \end{bmatrix}$. Definindo $\phi = 1 + \sqrt{5}$, colocando ϕ^{50} em evidência, e efetuando obtemos

$$A^{50}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = PD^{50}P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx$$

$$\frac{\sqrt{5}\phi^{50}}{10\cdot 2^{50}}\begin{bmatrix} \phi & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 \\ -1 & \phi \end{bmatrix}.$$

Efetuando obtemos,

$$A^{50}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \frac{\sqrt{5}\phi^{50}}{10\cdot 2^{50}}\begin{bmatrix} \phi\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{\phi^{50}}{2^{51}}\begin{bmatrix} \phi \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x_{52} \approx (\phi/2)^{51} \approx (1.61)^{51}$.

(c) do item anterior, $x_{k+1} \approx (\phi/2)^k$.

Des 7.12: (a) O único autovalor possível é 0 senão $N^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \neq 0$. (b) Portanto $D = 0$ e teríamos que ter, se fosse diagonalizável, $N = PDP^{-1} = 0$.

Des 7.13: Existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

(a) Como $D^T = D$, $A^T = (P^{-1})^T DP^T$. Verifique que se $Q = P^T$, $Q^{-1} = P^{-1})^T$. Assim $A^T = Q^{-1}DQ$ e portanto é diagonalizável.

(b) se autovalores são 1 ou -1, $D^{-1} = D$. Logo $A^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Des 7.14: (a) Se $T = \lambda_0 I$ ela já é diagonal com único autovalor λ_0. Se T é diagonalizável com único autovalor λ_0, $T = PDP^{-1}$, $D = \lambda_0 I$. Logo, $T = P(\lambda_0 I)P^{-1} = \lambda_0 PIP^{-1} = \lambda_0 I$.

(b) Se T é diagonalizável com 2 autovalores distintos então $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 I & \\ & \lambda_1 I \end{bmatrix}$. Assim $T = PDP^{-1}$. Logo $(T - \lambda_0 I)(T - \lambda_1 I) = P(D - \lambda_0 I)(D - \lambda_1 I)P^{-1}$. Veja que $D - \lambda_0 I = \begin{bmatrix} 0 & \\ & (\lambda_1 - \lambda_0)I \end{bmatrix}$. Complete as contas e mostre que o resultado é zero.

Des 7.15: Escreva $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ e faça contas.

Des 7.16: (b) $\begin{bmatrix} 3-2e & 6-6e \\ e-1 & 3e-2 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & e & 1 \\ 1 & 1 & e \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (d) pelo item (a) $e^A = Pe^DP^{-1}$. Como e^D possui inversa (todos elementos da diagonal são não-nulos), e^A possui inversa. (e) Se A é simétrica pelo Teorema 7.10 da p.205 $A = PDP^T$, com P ortogonal. Assim $e^A = Pe^DP^T$ e $(e^A)^T = P(e^D)^TP^t$. Como e^D é diagonal, é simétrica e com todos valores positivos. Logo e^A é simétrica e positivo definida.

Des 7.17: As colunas de A são ortonormais pois A é ortogonal. Se (a, b) tem norma 1, então $a^2 + b^2 = 1$. Logo existe θ (porque?) tal que $(a, b) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Assim se a primeira coluna é $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, como a segunda coluna é perpendicular com norma 1, deve ser $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ ou $(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$. Se o determinante é 1, a segunda coluna é $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim é uma rotação no plano. Se determinante é -1 obtemos uma reflexão.

Apêndice B

Tutorial do Maxima

O Software `Maxima` permite resolver, de forma literal ou numérica, problemas de Álgebra Linear, Cálculo, Física, etc. Apresentamos aqui um tutorial do `Maxima` para problemas da Álgebra Linear. Muitas funções para Álgebra Linear estão no menu na opção *Algebra*. Outras opções do menu são *Calculus*, que permite calcular limites, derivadas e integrais de forma simbólica, e *Plot*, que permite plotar gráfico de funções.

O Maxima é um software livre e pode ser obtido na Internet de graça. Existem versões para Windows, Linux e MAC OS (chama-se `WxMaxima`).

Após digitar o comando deve-se pressionar *control-enter*. Para começar nova linha pressionar *enter*. Todos comandos terminam com ponto e vírgula. Reinicializamos (apagamos todas as definições de funções e variáveis) o `Maxima` com:

```
kill(all);
```

B.1 Entrando com Matriz e Vetor

Pode-se entrar com uma matriz através do Menu: *Algebra* → *Enter Matrix*. Ainda no menu Algebra pode-se: inverter matriz, calcular polinômio característico, determinante, autovalores e autovetores.

Definimos um vetor com (transposta da matriz linha):

```
v:transpose([1,2,3]);
```

Note que utilizamos a sintaxe `nome:definição;` para definir a constante `nome` como `definição`. Define-se uma matriz, entrando linha por linha, com:

```
M: matrix([1,2,3], [2,2,4],[1,2,3]);
M: matrix([2,6,3,1,4], [2,6,3,-2,10], [-4,-12,-7,0,-10],[6,18,11,0,14]) ;
```

Pode-se entrar a matriz coluna por coluna calculando a transposta:

```
M: transpose(matrix([1,2,3,5], [2,2,4,4]));
```

Pode-se definir uma matriz diagonal com elementos d_i na diagonal com `diag_matrix`:

```
diag_matrix(d_1, d_2,...,d_n);
```

A Matriz identidade pode ser criada com `ident`:

```
ident(10);
```

B.2 Funções

Definimos uma função de 2 variáveis e apresentamos exemplos de invocação da função:

[0]Versão 16.out.2012

`f(x,y):=x+y^2;   f(3,2);   f(a,5);`

Pode-se definir um função de zero variáveis. No exemplo abaixo a função retorna um número aleatório cada vez que for invocada.

`f():=random(4.0);   f(); f();f();`

B.3 Resolvendo Sistemas Lineares

Pode-se resolver um sistema com `linsolve`, que resolve sistema qualquer, ou com `linsolve_by_lu`, que resolve sistema com matriz quadrada e solução única.

Sistemas são resolvidos com `linsolve([equações], [variáveis]);`:

```
linsolve([x-3*y+5*w=4, z+2*w=0, a=-2], [x,y,z,w,a]);
linsolve([x=1+s+t, y=-1+s+2*t],[s,t]);
linsolve([x=2-s+t,y=1+s-2*t],[t,s]);.
```

Entramos a matriz M e o lado direito $\mathbf{b}$ com:

`M: matrix( [1,2,3], [2,1,4], [2,1,2]);  b: transpose([3,3,5]);,`

Agora resolvemos o sistema com solução única com:

`linsolve_by_lu(M,b);`

Usando a mesma sintaxe de `linsolve`, pode-se obter os coeficientes da matriz e da matriz aumentada:

```
coefmatrix([x-3*y+5*w=4, z+2*w=0, a=-2], [x,y,z,w,a]);
augcoefmatrix([x-3*y+5*w=4, z+2*w=0, a=-2], [x,y,z,w,a]);
```

B.4 Escalonando Matriz Automaticamente

Calculamos a forma escalonada com `echelon`:

`M: matrix( [1,2,1,-1], [2,1,0,2], [3,3,1,1], [4,5,2,0]);.   echelon(M);`

Pode-se colocar na forma triangular superior (pivôs podem ser $\neq 1$) com `triangularize`:

`triangularize(M);`

B.5 Escalonando Matriz Manualmente

A função `rowop(M,i,j,k)` opera com linhas de M: linha $i \leftarrow$ linha $i - k *$ linha j. Vamos ilustrar com um exemplo. Entrando Matriz:

`M:matrix([-1,3,1],[-4,3,2],[2,-2,-1]);`

Qual a sequência de operações para se escalonar a matriz M?

`M1:rowop(M,2,1,4);  M2:rowop(M1,3,1,-2);  M3:rowop(M2,3,2,-4/9);`

Caso seja necessário pode-se trocar linhas com:

`rowswap(M,i,j);`

B.6 Espaço linha e coluna, Núcleo e Posto de Matriz

Calculamos o espaço gerado pelas colunas (`columnspace`), base do núcleo (`nullspace`) e posto de M (`rank`) com:

```
M: matrix( [1,2,1,-1], [2,1,0,2], [3,3,1,1], [4,5,2,0]);.
columnspace(M);  nullspace(M);  rank(M);
```

B.7 Produto Escalar, Matriz-Vetor e Matriz-Matriz

Calcula-se o produto Escalar $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ com `dotproduct`, o produto matriz-vetor $M\mathbf{v}$ e o produto matriz-matriz AB com "ponto":
`dotproduct(u, v);` ou `transpose(u).v;  M.v;  A.B;`

B.8 Matriz Inversa, Determinante e Traço

Calcula-se a **matriz inversa** com `invert`.
```
M: matrix( [1,-2], [1,1]);   invert(M);.
```
Calculamos o determinante (`determinant`) e traço (`mat_trace`) com:
```
determinant(M);.   mat_trace (M);
```
Outro Exemplo:
```
N: matrix([4,11,-7,-1,-3],[-2,2,1,0,3],[2,7,0,0,0],[0,3,0,0,0],[3,-1,6,0,5]);
determinant(N);
```

B.9 Complemento Ortogonal

Calculamos o complemento ortogonal de $\operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ com `orthogonal_complement`:
```
u:transpose([1,2,3]);   v:transpose([2,1,3]);   orthogonal_complement(u,v);
```

B.10 Mínimos Quadrados

Calculamos a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido de mínimos quadrados com `linsolve_by_lu`:
```
A:matrix([1,4],[2,1],[3,-2]);   b:transpose([2,0,0]);   At:transpose(A);
sol:linsolve_by_lu(At.A,At.b)[1];
```
Outro Exemplo: Determinando os coeficientes a, b, c da equação $y = ax + by + c$ do plano mais próximo no sentido dos mínimos quadrados que aproximam pontos x, y, z. Vamos gerar pontos próximos do plano $z = 3x + y + 4$ (note que usamos `random` para criar pontos ligeiramente fora do plano z) e calcular a, b, c.
```
z(x,y):=3*x+y+4+random(1.0);
A:matrix([1,1,1],[10,20,1],[2,1,1],[2,2,1]);
b:transpose([z(1,1), z(10,20),z(2,1),z(2,2)]);   At:transpose(A);
sol:linsolve_by_lu(At.A, At.b)[1];   erro:(A.sol-b);
a:sol[1];   b:sol[2];   c:sol[3];
```

B.11 Projeção e Reflexão

Dado vetor $\mathbf{v}$ a matriz de projeção na direção $\mathbf{v}$ é $P = \dfrac{vv^T}{v^Tv}$. Se $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$:
```
v:transpose([1,2,3]);
P:v.transpose(v)/transpose(v).v;
```
Projetando $\mathbf{b}$ na direção $\mathbf{v}$:
```
b:transpose([2,0,0]);   P.b;
```
Para calcular a projeção de $\mathbf{b}$ no espaço gerado por $(1, 2, 3)$ e $(4, 1, -2)$ temos que resolver um problema de mínimos quadrados:
```
A:transpose(matrix([1,2,3],[4,1,-2]));   At:transpose(A);
```

```
b:transpose([2,0,0]);
sol:linsolve_by_lu(At.A,At.b);    P:expand(A.sol[1]);
```

Obtemos matriz de projeção projetando $\mathbf{b} = (x, y, z)$:

```
b:transpose([x,y,z]);
sol:linsolve_by_lu(At.A,At.b);    P:expand(A.sol[1]);
```

Para se calcular a reflexão $R = 2P - I$, calcule projeção P pelo item anterior e calcule:

```
R:expand(2*P-[x,y,z]);
```

B.12 Aproximando Função por Polinômio

Vamos resolver o Exemplo 2.5 da p.29: aproximar $\cos(x)$ nos pontos $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Assim devemos resolver o sistema (está no exemplo):

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-2) \\ \cos(-1) \\ \cos(0) \\ \cos(1) \\ \cos(2) \\ \cos(3) \end{bmatrix}.$$

São 6 equações e 4 variáveis. Vamos resolver o problema de mínimos quadrados (veja Apêndice B.10 da p.245):

```
A:matrix([-8,4,-2,1],[-1,1,-1,1],[0,0,0,1],[1,1,1,1],[8,4,2,1],[27,9,3,1]);
b:transpose([cos(-2),cos(-1),cos(0),cos(1),cos(2),cos(3)]);
At:transpose(A);
sol:linsolve_by_lu(At.A,At.float(b))[1];
```

Assim os coeficientes do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que melhor aproxima $\cos(x)$ são: $a \approx 0.0524$, $b \approx -0.3164$, $c \approx -0.1648$, $d \approx 0.8915$. Note o uso de `float` para transformar em número real (ao invés de solução exata). Definindo o polinômio $p(x)$ que aproxima a função e plotando o gráfico do $\cos(x)$, da aproximação $p(x)$ e do erro $p(x) - \cos(x)$.

```
aa:sol[1][1]; bb:sol[2][1]; cc:sol[3][1]; dd:sol[4][1];
p(x):= aa*x^3 + bb*x^2 + cc*x + dd;
wxplot2d([p(x),cos(x),p(x)-cos(x)], [x,-2,3])
```

Vamos aproximar novamente $\cos(x)$ no intervalo $[-2, 3]$ mas agora como projeção ortogonal de $\cos$ no espaço dos polinômios de grau máximo 3 com relação ao produto interno $\langle f \,|g \rangle = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(s)g(s)\, ds$. Veja o Exemplo 5.19 da p.152.

Queremos determinar $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mais próximo possível do $\cos$ na norma induzida por este produto interno. Pela teoria devemos ter $\langle p - \cos \,|f \rangle = 0$ para $f = 1, x, x^2, x^3$ de modo que o vetor $p - \cos$ pertença ao complemento ortogonal (no sentido deste produto interno) do espaço gerado por $1, x, x^2, x^3$ (espaço dos polinômios de grau máximo 3). Vamos obter o sistema (porque?): $\begin{cases} a\,\langle x^3\,|1\rangle + b\,\langle x^2\,|1\rangle + c\,\langle x\,|1\rangle + d\,\langle 1\,|1\rangle = \langle \cos x\,|1\rangle \\ a\,\langle x^3\,|x\rangle + b\,\langle x^2\,|x\rangle + c\,\langle x\,|x\rangle + d\,\langle 1\,|x\rangle = \langle \cos x\,|x\rangle \\ a\,\langle x^3\,|x^2\rangle + b\,\langle x^2\,|x^2\rangle + c\,\langle x\,|x^2\rangle + d\,\langle 1\,|x^2\rangle = \langle \cos x\,|x^2\rangle \\ a\,\langle x^3\,|x^3\rangle + b\,\langle x^2\,|x^3\rangle + c\,\langle x\,|x^3\rangle + d\,\langle 1\,|x^3\rangle = \langle \cos x\,|x^3\rangle \end{cases}$

Precisamos calcular os produtos internos:

```
a00:integrate(1*1, x, -2, 3);    a01:integrate(1*x, x, -2, 3);
a02:integrate(1*x^2, x, -2, 3); a03:integrate(1*x^3, x, -2, 3);
```

```
a11:integrate(x*x, x, -2, 3);   a12:integrate(x*x^2, x, -2, 3);
a13:integrate(x*x^3, x, -2, 3); a22:integrate(x^2*x^2, x, -2, 3);
a23:integrate(x^2*x^3, x, -2, 3); a33:integrate(x^3*x^3, x, -2, 3);
```

O lado direito:

```
b0:integrate(cos(x)*1, x, -2, 3);   b1:integrate(cos(x)*x, x, -2, 3);
b2:integrate(cos(x)*x^2, x, -2, 3); b3:integrate(cos(x)*x^3, x, -2, 3);
```

Agora montamos a matriz, resolvemos o sistema, definimos o polinômio $q(x)$ que aproxima o $\cos(x)$ e plotamos o gráfico do $\cos(x)$, da aproximação $q(x)$ e do erro $q(x) - \cos(x)$.

```
M:matrix([a03,a02,a01,a00],[a13,a12,a11,a01],[a23,a22,a12,a02],[a33,a23,a13,a03]);
b:transpose([b0,b1,b2,b3]); sol:linsolve_by_lu(M,float(b))[1];
a2:sol[1][1]; b2:sol[2][1]; c2:sol[3][1]; d2:sol[4][1];
q(x):= a2*x^3 + b2*x^2 + c2*x + d2;
wxplot2d([q(x),cos(x), q(x)-cos(x)], [x,-2,3]);
```

Obtemos $a \approx 0.0558$, $b \approx -0.3575$, $c \approx -0.1329$, $d \approx 0.9295$.

Comparando uma aproximação com outra, note que o erro de q é menor do que p de forma geral, exceto nos extremos:

```
wxplot2d([(p(x)-cos(x))^2,(q(x)-cos(x))^2], [x,-2,3]);
```

B.13 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Calcule a ortogonalização das **linhas** de M com `gramschmidt`:

```
load(eigen);gramschmidt (M);
```

B.14 Autovalores e Autovetores

Calculamos os **autovalores** e **autovetores** com `eigenvalues` e `eigenvectors`.

```
M: matrix( [1,-1], [-1,1]);   eigenvalues(M)[1];   eigenvectors(M)[2];
```

Pode-se ver autovalores e multiplicidades com:

```
eigenvalues(M);
```

Calculamos o polinômio característico (em x) com:

```
expand(charpoly(M,x));
```

B.15 Diagonalização

Calculamos a decomposição espectral de uma matriz 3×3 da seguinte forma. Calcule autovalores e autovetores:

```
M: matrix([1,2,3], [2,2,4],[1,2,3]);
avect:eigenvectors(M)[2];   aval:eigenvalues(M)[1];
```

Defina P, a base de autovetores, e D a matriz diagonal com os autovalores:

```
P:transpose(matrix(avect[1][1],avect[2][1],avect[3][1]));
D:diag_matrix (aval[1][1],aval[1][2],aval[1][3]);
```

Verifique se a decomposição está correta:

```
expand(P.D.invert(P));
```

B.16 Criando Exercícios e Exemplos

Nesta seção mostramos como criar exemplos e exercícios de forma automática com o `Maxima`: Queremos gerar matrizes com números inteiros em cada entrada. Dizemos que a matriz é **inteira**. Note que usamos a função `random` que permite criar de forma aleatória as matrizes.

Referência para esta seção: Frank Uhlig. Transform Linear Algebra. Pearson (2001).

B.16.1 Matrizes Para Escalonar Manualmente

Como determinar uma matriz B que possa ser escalonada por inteiros para matriz R? Uma solução é, dada uma matriz escada R com entradas inteiras, escolha A com entradas aleatórias e defina $B = AR$. Se A for invertível, B será escalonada para R; se A não for invertível, então B será escalonada para um subconjunto de linhas de R. Uma opção é colocar A triangular inferior com ± 1 na diagonal.

```
row1:[1, 5, 0, 3, 0];  row2:[0, 0, 1, 2, 0];  row3:[0, 0, 0, 0, 1];
R:matrix(row1,row2,row3);
f [i, j] := random(10);  A:genmatrix (f, 3, 3);  B: A.R;
```

B.16.2 Sistemas Com Solução Inteira

Como obter sistemas com solução inteira? Defina B como na subseção anterior. Agora defina $\mathbf{v}$ um vetor com entradas inteiras e defina $\mathbf{b} = B\mathbf{v}$.

```
r():= random(5)-2;  v:[r(), r(), r()];  b:B.v;
```

B.16.3 Determinante é um Inteiro

Crie matrizes triangular superior U e triangular inferior L com pequenos inteiros na diagonal. Tome $M = LU$.

Gera um número de -2 a 2 (inteiro):

```
r():= random(5)-2;
```

Gerando matrizes diagonal superior e inferior e defina $M = LU$:

```
U:matrix([r(),r(),r()],[0,r(),r()],[0,0,r()]);
L:matrix([1,0,0],[r(),1,0],[r(),r(),1]);
M:L.U;  determinant(M);
```

B.16.4 Matriz e Inversa são Inteiras

Defina matrizes U e L triangular superior e inferior, respectivamente, com todos elementos da diagonal iguais a 1 ou -1. Depois defina $M = UL$. Assim o determinante de M será ± 1 e a inversa de M será inteira.

Criando U e L. Note que randomizamos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal de U e L e os elementos da diagonal através das funções (sem argumentos) $u()$, que gera ± 1, e da função $r()$, que gera um número inteiro entre -2 a 2:

```
u():=random(2)*2-1; r():= random(5)-2;
U:matrix([u(),r(),r()],[0,u(),r()],[0,0,u()]);
L:matrix([1,0,0],[r(),1,0],[r(),r(),1]);
M:U.L;  N:invert(M);
```

Verificamos a resposta e I com `M.N;`.

B.16.5 Matrizes com autovalores e autovetores inteiros

Defina uma matriz P onde cada coluna é um autovetor. O ideal é que P possui inversa com inteiros. Veja Subseção anterior para gerar P e P^{-1} inteiras Depois defina D uma matriz com autovalores na diagonal e defina $M = PDP^{-1}$

```
P: transpose(matrix([1,0,0], [2,5,-2],[-1,-2,1]));   D:diag_matrix (2,1,2);
M:expand(P.D.invert(P));
```

Para criar uma que não é diagonalizável coloque D com bloco de Jordan:

```
D: matrix([1,1,0], [0,1,0],[0,0,2]);
```

Verifique se está certo checando autovetores e autovalores:

```
eigenvalues(M)[1];   eigenvectors(M)[2];
```

Referências Bibliográficas

[1] Anton, Howard; Rorres, Chris; *Álgebra Linear com Aplicações;* Bookman; 2001.

[2] Axler, Sheldon; *Linear Algebra Done Right;* Springer; 1997.

[3] Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler; *Álgebra Linear;* Harbra; 1986.

[4] Diversos autores; *Listas e Provas Antigas do DMA – IM – UFRJ;* 1990–2006.

[5] Halmos, Paul; *Finite-Dimensional Vector Spaces;* Springer Verlag; 1974.

[6] Hefferon, Jim; *Linear Algebra;* Acessado em Maio de 2008:
`http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`

[7] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray; *Linear Algebra;* Prentice-Hall; 1971.

[8] Jänich, Klaus; *Linear Algebra;* Springer Verlag; 2007.

[9] Lay, David C.; *Linear Algebra and Its Applications;* Addison-Wesley; 1987.

[10] Leon, Steven J.; *Linear Algebra With Applications;* Prentice Hall; 2005.

[11] Santos, Reginaldo J.; *Um Curso de Geometria Analítica e Algebra Linear;* Imprensa Universitaria da UFMG; 2007.

[12] Shilov, Georgi E.; *Linear Algebra;* Dover Publications; 1977.

[13] Strang, Gilbert; *Introduction to Linear Algebra;* Wellesley-Cambridge Press; 1993.

[0] Versão 0.2

Índice Remissivo

área
 com sinal, 169
ângulo entre vetores, 155

abuso
 de linguagem, 36, 93, 109
 de notação, 31, 36, 121
algoritmo
 de eliminação de Gauss, 42
 do cálculo do determinante, 176
 matriz inversa, 114
 para diagonalizar matriz, 203
autoespaço, 196
autofunção, 201
autovalor, 195
autovetor, 195

base
 canônica do $\mathbb{R}^n$, 73
 caracterização, 73
 definição, 72
bijetiva, 104, 111

Cauchy-Schwarz, 155
Chió, 193
coeficientes de Fourier, 160
combinação linear
 em $\mathbb{R}^n$, 13
combustão, 27
compatível, 32
complemento ortogonal, 140
conjunto
 fechado, 67
 gerador, 15
 ortogonal, 140
 ortonormal, 140
 solução, 48, 55, 56
 vazio, 71
consistente, 32
contradomínio, 92
coordenadas, 118
corpos
 movimentos rígidos, 205
Cramer
 regra de, 167, 186

decomposição
 espectral, 201, 205
 LU, 63
 polar, 166
 QR, 166
 SVD, 135
delicada, 83, 152
delta
 de Kroenecker, 80
desigualdade triangular, 155
determinado, 32
determinante
 algoritmo, 176
 cálculo eficiente, 176
 caracterização algébrica, 171
 caracterização geométrica, 168, 169
 como área, 168
 como volume, 169
 da transposta de matrizes, 174
 de matriz, 172
 de matriz 2×2, 168
 de matriz 3×3, 169
 definição geral, 171
 do produto de matrizes, 178
 fórmula de Leibniz, 174
 interpretação geométrica, 182
 operações elementares, 175, 176
 sinal, 185
diagonalizar, 203
dimensão
 definição, 17, 74, 84
 finita, 83
 infinita, 83, 201
distância, 138
domínio, 92

elementos finitos, 80
eliminação de Gauss, 42
entradas, 1
equação(ões) cartesiana(s)
    plano, 8
    reta, 5, 12
erro comum, 40, 111, 178, 180
escalonada, 41, 42
espaço
    das transformações lineares, 116
    de funções, 76
    de funções contínuas, 77
    de funções diferenciáveis, 77
    de polinômios, 76
    dimensão infinita, 83, 201
    gerado, 15
        por conjunto vazio, 71
    imagem, 100
    linha e coluna de uma matriz, 104
    matrizes, 30
    núcleo, 99
    vetorial, 65
espectro, 195

fórmula
    de Leibniz, 174
    mínimos quadrados, 144
    matriz de rotação, 96
    solução de sistema, 186
fechado, 67
Fibonacci, 215
fluxos, 29
forma
    escalonada, 41, 46
    escalonada reduzida, 42
    linear, 135
    quadrática, 208
    totalmente escalonada, 42, 45
Fourier, 153, 160
função
    bijetiva, 104, 111
    composição, 107
    contradomínio, 92
    domínio, 92
    imagem, 92
    injetiva, 104, 105
    inversa, 111
    invertível, 111
    linear, 92
    propriedades da composição, 107
    sobrejetiva, 104
funcional linear, 135

Gauss, 42
gerador, 15
grau
    de indeterminação, 48
    de liberdade, 48

hessiana, 205
hiperplano, 56

imagem, 69, 92, 100, 102
impossível, 32
incógnita, 32
incompatível, 32
inconsistente, 32
indeterminado, 32
injetiva, 104
integral
    analogias, 169
    mudança de variáveis, 167
interseção
    de conjuntos, 8–10, 50
    de subespaços, 70, 71, 76
invertível, 111

jacobiano, 167, 181

kernel, 55, 99
Kroenecker
    delta de, 80

lado direito, 36
LD, 16
lei dos cossenos, 154
lema
    autovalores são LIs, 202
    bijeção entre matrizes e TLs, 94
    caracterização de base, 73
    caracterização de subespaço, 67
    caracterização dos conjuntos LD, 84
    conjunto gerado é subespaço, 71
    conjunto gerador e LI, 83
    conjunto ortogonal é LI, 140
    determinando uma TL, 94
    determinante de matriz bloco-triangular, 179
    determinante matriz triangular, 175
    dimensão do espaço linha e coluna, 104

do complemento ortogonal, 141
eliminando vetores redundantes, 84
escalonamento e espaço gerado, 74
espaço vetorial das matrizes, 115
espaço vetorial das TLs, 116
estendendo conjunto LI em base, 84
função vetor → coordenadas é bijeção linear, 121
imagem é subespaço, 100
injetividade e sobrejetividade de TL, 105
interpretação do produto matriz-vetor, 54
interpretações do produto matriz-matriz, 109
inversa da composta, 112
linearidade do produto matriz-vetor, 54
matrizes da mesma TL, 125
mudança de área de um quadrado, 181
núcleo é subespaço, 99
núcleo e inversa de matriz, 113
ortogonalidade, 139
produto matriz-matriz, 109
propriedades da composição de funções, 107
propriedades da composição de TLs, 108, 117
propriedades da função inversa, 111
propriedades da inversa de TL, 112
propriedades das operações com matrizes, 115
propriedades do complemento ortogonal, 141
propriedades do produto interno, 138
relação entre produto de matrizes e composição de TLs, 124
sistemas e matrizes equivalentes, 38
soma e produto de matrizes por blocos, 117

LI, 16
linearmente
dependente, 16
independente, 16
LU, 63

múltiplo, 3
mínimos quadrados, 144, 151
matriz
ampliação, 95
ampliada, 36
anti-simétrica, 191
aumentada, 36
bloco-triangular, 179
blocos, 117
de coeficientes, 36
de Vandermonde, 193
decomposição espectral, 205
definição, 30
diagonal, 36
diagonalizável, 201
em blocos, 117
equivalente, 38
escalonada, 41, 46
escalonada reduzida, 42
espaço, 30
espaço linha e coluna, 104
exponencial, 215
hessiana, 205
identidade, 113
imagem, 69, 102
inversa, 113, 114
invertível, 113
kernel, 55, 102
mudança de base, 124
núcleo, 55, 69, 102
negativo definida, 208
nilpotente, 131, 191, 215
operações, 115
ortogonal, 116, 191
positivo definida, 208
potências, 206
produto
escalar-matriz, 115
matriz-matriz, 109
matriz-vetor, 53
por blocos, 117
projeção, 95, 148, 166, 190
propriedades das operações, 115
propriedades do produto, 124
raíz quadrada, 207
redução, 95
reflexão, 95, 149, 166
rotação, 96, 166
semelhante, 125, 213
simétrica, 115, 205, 208
singular, 113
soma, 115
por blocos, 117
totalmente escalonada, 42, 45
transformação linear associada, 93

transposta, 104, 141
triangular, 37
tridiagonal, 194
Maxima, 12, 45, 50, 75, 114, 142, 145, 150, 159, 176, 197, 243
moedas, 27
morfismo, 82
multiplicação
por escalar, 2, 65
munido, 2, 66, 76, 91, 115, 116

n-upla, 1
núcleo, 55, 69, 99, 102, 112
negativo definida, 208
norma, 138
normalização, 139
nulidade, 99

operações elementares, 38
determinante, 175, 176
origem, 2
ortogonal, 116

parábola, 28
parâmetros, 48
paralelo, 3
parametrização
conjunto-solução de sistema linear, 48
plano, 10, 20
reta, 5, 6, 9, 18
subespaço vetorial, 75
Pitágoras, 139
pivô, 41
placa
aquecida, 29
tectônica, 198
plano, 8, 20, 32
polinômio
característico, 196
positivo definida, 208
possível, 32
posto, 100, 194
processamento de imagem, 82
produto
escalar, 54, 137
escalar-matriz, 115
escalar-vetor, 2, 65
interno, 54, 137
interpretação geométrica, 4
matriz-matriz, 109
matriz-vetor, 53
misto, 184
por escalar, 2, 4
vetorial, 183
projeção
em base ortogonal, 159
oblíqua, 165, 190
ortogonal, 95, 142, 144, 148, 166

QR, 166

redundante, 15, 17
reflexão, 149, 166
regra
de Chió, 193
de Cramer, 167, 186
de Sarrus, 174
do paralelogramo, 4
do triângulo, 4
mão direita, 184, 185
reta, 5, 9, 18, 31
$\mathbb{R}^n$, 1
rotação, 96, 166

série de Fourier, 153
Sarrus
regra de, 174
simétrica, 115
sistema
com infinitas solução, 32, 49, 55, 58
com solução única, 32, 55, 58
compatível, 32
conjunto-solução, 48, 56
consistente, 32
determinado, 32
em $\mathbb{R}$, 31
em $\mathbb{R}^2$, 32, 57
em $\mathbb{R}^3$, 57
equivalente, 37
existência e unicidade, 45, 46
fórmula de solução, 186
homogêneo, 54
impossível, 32
incompatível, 32
inconsistente, 32
indeterminado, 32
interpretação algébrica, 56
interpretação geométrica, 56
lado direito, 36
matriz, 36

possível, 32
regra de Cramer, 186
sem solução, 32, 58, 143
solução geral, 55, 56
solução particular, 55, 56
solução trivial, 55
sistemas
resolver simultanemante, 113
sobrejetiva, 104
solução
existência e unicidade, 45, 46
geral, 55, 56
mínimos quadrados, 144
particular, 55
sistema, 47, 48, 55, 56
trivial, 55
soma
$\mathbb{R}^n$, 2
de subespaços, 70, 76
direta de subespaços, 89
vetores, 65
Sturm-Liouville, 90
subespaço
associados a uma matriz, 69
caracterização, 67
definição, 67
interseção, 70, 71, 76
soma, 70, 76
soma direta, 89
trivial, 71
SVD, 135
Sylvester, 134

teorema
algoritmo para calcular matriz inversa, 114
caracterização algébrica do determinante, 171
caracterização de matrizes não-invertíveis, 177
conjunto-solução de sistema linear, 48
de Cauchy-Schwarz, 155
de Pitágoras generalizado, 139
determinante da transposta, 174
determinante do produto, 178
do núcleo-imagem, 102
espectral para matrizes simétricas, 205
existência e unicidade pela forma totalmente escalonada, 45
fundamental da Álgebra Linear, 102
Gram-Schmidt, 161
inversa e o núcleo, 112
mínimos quadrados, 144
modificação de área por TL, 182
projeção ortogonal em base ortogonal, 159
relação entre matriz e TL, 122
solução geral de sistema, 56
TL, 92
TNI, 102
traço, 165, 212
transformação linear
composição, 108, 117
definição, 92
diagonalizável, 201
espaço, 116
imagem, 100
injetiva, 105
inversa, 112
kernel, 99
matriz associada, 94, 122
núcleo, 99
nulidade, 99
operações, 116
posto, 100
produto por escalar, 116
propriedades, 108, 117
propriedades da inversa, 112
rotação, 96
soma, 116
transposta, 104, 141

valores singulares, 135
Vandermonde, 61, 193
variável
dependente, 47
independente, 47
líder, 47
livre, 47
vetor
$\mathbb{R}^n$, 1
ângulo, 155
coordenadas, 118
distância, 138
função como, 81
múltiplos, 3
multiplicação por escalar, 2, 65
norma, 138
nulo, 2, 55
outra representação, 81

paralelo, 3
produto
escalar, 54, 137
escalar-vetor, 2, 65
interno, 54, 137
matriz-vetor, 53
vetorial, 183
redundante, 15, 17
unitário, 139

wronskiano, 80, 121, 193