Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Alguns Problemas e Exames Resolvidos de Álgebra Linear

LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

1^o Semestre 2008/2009

Prof. Paulo Pinto
http://www.math.ist.utl.pt/∼ppinto/

Conteúdo

1 Alguns problemas resolvidos

1.1 O sistema linear

$$\begin{cases} x+z=3 \\ \\ x+2y+2z=6 \\ \\ 3y+3z=6 \end{cases}$$

na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 3 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} x+z=3 \\ \\ 2y+z=3 \\ \\ \frac{3}{2}z=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \\ y=1 \\ \\ z=1. \end{cases}$$

1.2 O sistema linear

$$\begin{cases} 3z-9w=6 \\ \\ 5x+15y-10z+40w=-45 \\ \\ x+3y-z+5w=-7 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -45 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 & | & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & | & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \frac{1}{5}L_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & | & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & | & 6 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & | & 6 \end{bmatrix} \underset{3L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & | & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} x+3y-z+5w=-7 \\ \\ -z+3w=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y-2w-5 \\ \\ z=3w+2. \end{cases}$$

As incógnitas y e w são livres e as incógnitas x e z são não livres. A solução geral do sistema é:

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3y-2w-5 \\ y \\ 3w+2 \\ w \end{bmatrix},$$

para quaisquer $y, w \in \mathbb{R}$, isto é, o conjunto solução é dado por:

$$S=\{(-3y-2w-5, y, 3w+2, w) : y, w \in \mathbb{R}\}.$$

Neste exemplo o sistema tem **infinitas soluções** e diz-se **possível e indeterminado**.

1.3 Seja $a \in \mathbb{R}$. O sistema linear

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ \\ x+y-z=2 \\ \\ x+y+\left(a^2-5\right)z=a \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a^2-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}.$$

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \\ -L_1+L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-6 & a-3 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix}.$$

Se $a=2$, então o sistema é possível e indeterminado:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+1 \\ \\ y=-2z+1, \end{cases}$$

a incógnita z é livre, as incógnitas x e y são não livres e a solução geral do sistema é

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3z+1 \\ -2z+1 \\ z \end{bmatrix},$$

para qualquer $z \in \mathbb{R}$, isto é, o conjunto solução é dado por:

$$S=\{(3z+1, -2z+1, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, se $a = 2$, o sistema tem **infinitas soluções** e diz-se **possível e indeterminado**.

Se $a = -2$, o sistema **não tem solução** e diz-se **impossível**.

Se $a \neq -2$ e $a \neq 2$, o sistema tem a **solução única**:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+5)/(a+2) \\ a/(a+2) \\ 1/(a+2) \end{bmatrix}$$

e diz-se **possível e determinado**.

1.4 (Inversão de Matrizes)

(i) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \\ -2L_1+L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{5}L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_3+L_2 \\ -L_3+L_1}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 9/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{L_2+L_1}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & -1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{-L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right].$$

Portanto A é invertvel e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/5 & 2/5 & -3/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, A é singular e como tal não é invertível.

1.5 (Regra de Laplace para calcular um determinada entrada da matriz inversa)
Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

A entrada $(2,3)$ da matriz A^{-1} é dada por

$$(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A}\left((cofA)^T\right)_{23} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{3+2}\det A_{32}\right) = \frac{1}{-3}\left(-\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right)\right) = 2.$$

1.6 (Regra de Cramer)
O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ \\ -x + 2y + 4z = 7 \\ \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

pode ser resolvido usando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 13, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -18 \quad \text{e} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 14.$$

1.7 Sejam $E = L(\{(1,1,1),(1,2,2)\})$ e $F = L(\{(0,1,-1),(1,1,2)\})$.
(a) Determine a dimensão de $E+F$.
(b) Determine a dimensão de $E \cap F$.

Resolução: (a) Temos que $E + F = L(E \cup F) = L(\{(1,1,1),(1,2,2),(0,1,-1),(1,1,2)\})$.

Escrevendo as componentes destes vectores como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos uma matriz de característica 3 pelo que a dimensão de $E+F$ é 3.

(b) Como os vectores $(1,1,1),(1,2,2)$ são linearmente independentes, por não serem múltiplos um do outro, a dimensão de E é 2. Analogamente se vê que a dimensão de F é 2. Dado que dim $E+F=$ dim $E+$ dim $F-$ dim $E\cap F$ e pela alínea anterior dim $E+F=3$, temos que a dimensão de $E\cap F$ é 1.

1.8 (Uma matriz com valores próprios distintos)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)-20+4(2+\lambda)= \\
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)+4\lambda-12= \\
&= (3-\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda+2)-4\right]= \\
&= (3-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-6\right)= \\
&= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3).
\end{aligned}$$

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1=3, \quad \lambda_2=2 \quad \text{e} \quad \lambda_3=-3.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos $u\in\mathbb{R}^3$ para os quais

$$(A-\lambda I)\,u=0,$$

isto é, são os vectores não nulos de $\text{Nuc}\,(A-\lambda I)$.

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1=3$. Tem-se

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda_1 I)=\text{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1}=\text{Nuc}\,(A-\lambda_1 I)=L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1=3$ são

$$u=(0,s,5s)\,, \quad \text{com} \quad s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2=2$. Tem-se

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda_2 I)=\text{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,1,4)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \text{Nuc}\,(A - \lambda_2 I) = L\left(\{(1,1,4)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s, s, 4s)\,, \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = -3$. Tem-se

$$\text{Nuc}\,(A - \lambda_3 I) = \text{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(3,-2,2)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$E_{\lambda_3} = \text{Nuc}\,(A - \lambda_3 I) = L\left(\{(3,-2,2)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = -3$ são

$$u = (3s, -2s, 2s)\,, \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

1.9 Determine todos os vectores e valores próprios da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução O polinómio característico de A é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda,$$

pelo que os valores próprios de T (os mesmos que os de A) são $\{0, 5\}$. Resta-nos encontrar os vectores próprios associados a cada valor próprio. O espaço próprio $E(0)$ associado a valor próprio λ=0 é $E(0) = \text{Nuc}(A - 0I) = \text{Nuc}(A)$, cuja base é $\{(2,1)\}$. Portanto os vectores próprios associados ao valor próprio λ=0 são $\{(2a, a)\}$ para qualquer escalar a não nulo.
Finalmente, o espaço próprio $E(5)$ associado ao valor próprio $\lambda = 5$ é

$$E(5) = \text{Nuc}(A - 5I) = \text{Nuc}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

cuja base é $\{(1,-2)\}$, donde $\{(b, -2b) : b \neq 0\}$ são os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 5$.

1.10 Seja $A \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matriz invertível.
(a) Prove que 0 não é valor próprio de A.
(b) Encontre os valores e vectores próprios de A^{-1} em função dos de A.

Resolução: (a) Comece por notar que, por definição, 0 é valor próprio de A sse 0 é raiz do polinómio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, i.e. $0 = p(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$. Pelo que 0 é valor próprio de A sse $\det A = 0$, ou seja sse A não é invertível. Conclusão: A invertível sse $p(0) \neq 0$.
(b) Seja λ valor próprio de A. Por (a), $\lambda \neq 0$. Vamos agora provar que $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1}. Usando propriedades dos determinantes temos:

$$\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I) = \det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(I - \frac{1}{\lambda}A) = \det(A^{-1})\det(\frac{1}{\lambda}\lambda I - \frac{1}{\lambda}A) =$$

$$\det(A^{-1})\det\Big(\frac{-1}{\lambda}(A - \lambda I)\Big) = \Big(\frac{-1}{\lambda}\Big)^n \det A^{-1}\det(A - \lambda I),$$

pelo que $\lambda^n \det(A)\det(A^{-1} - 1/\lambda I) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$. Portanto λ é valor próprio de A sse $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1}.
Seja v um vector próprio de A associado a um valor próprio λ. Portanto $Av = \lambda v$ por definição. Aplicando a inversa de A em ambos os membros desta igualdade obtemos $A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$, logo $v = \lambda A^{-1}v$. Portanto $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Assim concluimos que v também é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $1/\lambda$.

1.11 Prove que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

Resolução: O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

pelo que A tem $\lambda = 2$ como único valor próprio (com multiplicidade algébrica dupla). O respectivo espaço próprio $E(2) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ cuja base é formada por um só vector $e_1 = (1, 0)$. Como a multiplicidade geométrica deste valor próprio $\lambda = 2$ não é igual à sua multiplicidade algébrica, conclui-se de imediato que a matriz A não é diagonalizável.

1.12 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.
(a) Encontre os valores próprios de A_α e respectivas multiplicidades algébricas. Diga, quando A_α é invertível e nesse(s) caso(s), calcule os valores próprios de A_α^{-1}.
(b) Determine base para cada espaço próprio $E(\lambda)$ de A_α.
(c) Prove que A_α é diagonalizável para qualquer α, e encontre uma matriz mudança de base S_α e matriz diagonal D_α tal que $A_\alpha = S_\alpha^{-1} D_\alpha S_\alpha$.
(d) Faça a alínea anterior usando a matriz A_α^{-1} (sempre que A_α^{-1} exista).
(e) Prove que $\langle u, v \rangle = uA_\alpha v^t$ não mune $\mathbb{R}^3$ com um produto interno (para todo o α).

Resolução: (a) O polinómio característico de A_α é (usando a regra de Laplace):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{bmatrix} = \Big((1-\lambda)^2 - 4\Big)(\alpha - \lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\alpha-\lambda),$$

pelo que os valores próprios de A_α são $\{-1, 3, \alpha\}$. As multiplicidades algébricas são todas simples, quando $\alpha \notin \{-1, 3\}$. Se $\alpha = -1$ a multiplicidade algébrica de $\lambda = -1$ é dois, e a de $\lambda = 3$ é um. No caso $\alpha = 3$, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ é dois, e a de $\lambda = -1$ é um.
A matriz A_α é invertível sse $\alpha \neq 0$, e os valores próprios de A^{-1} são $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$ (ver exercício 1.10).
(b) Caso $\alpha \notin \{-1, 3\}$:

- O espaço próprio associado a $\lambda = -1$ é $E(-1) = \mathrm{Nuc}(A - (-1)I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}$.

  Pelo que a base de $E(-1)$ é $\{(-1, 1, 0)\}$.

- O espaço próprio associado a $\lambda = 3$ é $E(3) = \mathrm{Nuc}(A - 3I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix}$.

  Portanto $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base para $E(3)$.

- O espaço próprio associado a $\lambda = \alpha$ é $E(\alpha) = \mathrm{Nuc}(A - \alpha I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

  Logo $\{(0, 0, 1)\}$ é uma base para $E(\alpha)$.

Falta investigar dois casos singulares. No caso $\alpha = -1$, $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base para $E(-1)$, enquanto $\{(1, 1, 0)\}$ forma uma base para $E(3)$. No caso $\alpha = 3$, $\{(-1, 1, 0)\}$ forma uma base para $E(-1)$, e $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base para $E(3)$.
(c) A matriz A_α é diagonalizável para todo o α porque é simetrica $A_\alpha^T = A_\alpha$. (Alternativelmente, verifique que a multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio coincidem.)
Sendo $S_\alpha = M(id; B_{vp}, Bc)$ a matriz mudança de base, as colunas de S_α são formadas pelos vectores que provêm das bases dos espaços próprios, e as entrada na matriz diagonal D_α são os valores próprios correspondentes aos vectores próprios em S_α. Assim, e em todos os casos, $S_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Note que se A_α representa a transformação linear T_α na base canónica, S_α é a matriz mudança de base (da base formada por vectores próprios para a base canónica) e D_α representa T_α na base formada pelo vectores próprios (verifique!).
(d) A matriz é invertível sse $\alpha \neq 0$. Os valores próprios de A^{-1} são pelo exercício 1.10, $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$. As bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(1/3)$ e $E(1/\lambda)$ de A^{-1} coincidem (novamente pelo exercício 1.10) com as bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(3)$ e $E(\alpha)$ de A, respectivamente. Temos trivialmente $A_\alpha^{-1} = S_\alpha^{-1} D_\alpha^{-1} S_\alpha$, onde S_α e D_α são as matrizes calculadas em (c).

(e) Observe que A_α têm pelo menos um valor próprio negativo (para qualquer α)!

1.13 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
(a) Encontre a solução geral do sistema de equações diferencias $x'{=}Ax$, onde $x'(t){=}(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$.

(b) Calcule a solução de $x'(t) = Ax(t)$ que passa no ponto $x(0) = (1,1,1)$.

Resolução: (a) • Comece por observar que A é simétrica, portanto A é diagonalizável. Vamos encontrar, em primeiro lugar, matriz mudança de base S e matriz diagonal D tais que $S^{-1}AS = D$.
O polinómio característico de A é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$, pelo que os valores próprios de A são $\{0, 2\}$. O vector $(-1, 0, 1)$ forma uma base para $E(0)$, enquanto $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ fornecem uma base para o espaço próprio $E(2)$. Logo

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

• De seguida, vamos resolver o sistema de equações diferenciais $y' = Dy$. Como D é diagonal, a solução geral desta equação é imediata: $y(t) = (c_1e^{0t}, c_2e^{2t}, c_3e^{2t}) = (c_1, c_2e^{2t}, c_3e^{2t})$ com c_1, c_2, c_3 constantes.
• Finalmente, a solução geral de $x' = Ax$ obtém-se da de $y' = Dy$ da seguinte forma

$$x(t) = Sy(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_3e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_1 + c_3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(b) Já vimos em (a) que a solução geral de $x' = Ax$ é $x(t) = (-c_1 + c_3e^{2t}, c_2e^{2t}, c_1 + c_3e^{2t})$. Falta-nos determinar os valores das constantes c_1, c_2, c_3, pelo que temos de usar a condição $x(0) = (1, 1, 1)$ da seguinte maneira:

$$(1, 1, 1) = x(0) = (-c_1 + c_3, c_2, c_1 + c_3)$$

donde $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1$. Portanto $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = e^{2t}$ e $x_3(t) = e^{2t}$.

1.14 No espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 3, P_3, considere os vectores $v_1 = 1 + x^3$, $v_2 = 1 + x^2 + x$, $v_3 = x - x^3$, $v_4 = 1 - x$.
(a) Verifique que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3.
(b) Sendo $T : P_3 \to P_3$ a transformação linear tal que

$$T(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) = (y_1 + y_2)v_3 + (y_3 + y_4)v_1$$

determine a imagem, o núcleo e os subespaços próprios de T.
(c) Escreva a matriz C que representa T em relação à base $B_2 = (1, x, x^2, x^3)$ e diga justificando se C é diagonalizável.
(d) Resolva a equação $T(p(x)) = 3v_3$.

Resolução:

(a) Escrevendo as componentes destes vectores em relação à base $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ de P_3 como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

concluímos que, dado que a dimensão do espaço das linhas da matriz é 4, também a expansão linear $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ tem dimensão 4 (igual à dimensão de P_3), donde $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3.

(b) Como $T(v_1) = v_3, T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_1, T(v_4) = v_1$, a matriz que representa T em relação à base B (ou seja $M(T; B)$) é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço de colunas desta matriz é $L(\{(0,0,1,0),(1,0,0,0)\})$, e logo $ImT = \{v \in P_3 : v_B \in \mathcal{C}(A)\} = L(\{v_3, v_1\})$. O núcleo de A é

$\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\} = \{(-y,y,-w,w) : y,w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\})$, e logo

Nuc $T = \{v \in P_3 : v_B \in Nuc(A)\} = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\})$.

O polinómio característico $p(\lambda)$ de A é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-\lambda)\Big((-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}\Big) =$$

$= (-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Logo os valores próprios de T são $0, 1, -1$.

O subespaço próprio associado a 0 é o núcleo de T, que já foi determinado.

Temos $A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A - 1I) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : -x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = \{(x,0,x,0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1,0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a 1 é o subespaço $L(\{v_1 + v_3\})$.

Temos $A + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A - 1I) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = L(\{(-1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a -1 é o subespaço $L(\{-v_1 + v_3\})$.

(c) Seja $G = M(id; B, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz G^{-1} é a matriz $M(id; B_2, B)$ e pode ser determinada (determine!) pelo método de Gauss-Jordan ou usando a matriz dos cofactores, i.e.

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $A = M(T; B)$ temos que $C = M(T; B_2) = GAG^{-1}$ (calcule C!).

Dado que, pelas alíneas anteriores, sabemos que a soma das dimensões dos subespaços próprios de T é 4, a transformação T é diagonalizável ou seja P_3 admite uma base B_3 constituída por vectores próprios de T. A matriz D de T em relação a esta base é diagonal e C é semelhante a D, por representar T em relação a outra base de $\mathcal{P}_3$. Logo C é diagonalizável.

(d) As soluções da equação $T(p(x)) = 3v_3$ são exactamente os elementos da imagem completa inversa $T^{-1}(v_3)$. Sabemos que $T(v_1) = v_3$ pelo que $T(3v_1) = 3v_3$ e logo as soluções da equação dada são os elementos de $3v_1 + NucT$. Se quisermos descrever em extensão este conjunto obtemos $3v_1 + NucT = \{(3 - a)v_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$, dado que

Nuc $T = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\}) = \{-av_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ideia para uma resolução alternativa: As coordenadas do vector $3v_3$ em relação à base B são $(0, 0, 3, 0)$ e logo

$T^{-1}(v_3) = \{v \in V : v_B$ é solução de $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Resolvendo este sistema obtemos o conjunto solução pretendido.

1.15 Em $\mathbb{R}^3$, considere o seguinte produto interno:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc$$

o qual se fixa em <u>todas</u> as alíneas que se seguem.

(a) Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é de facto um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontre uma base ortogonal para $E = L(\{e_1, e_2\})$ onde $e_1 = (1,0,0)$ e $e_2 = (0,1,0)$.
(c) Determine uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$. Verifique que $\dim(E) + \dim(E^\perp) = \dim \mathbb{R}^3$.
(d) Encontre a representação matricial da projecção ortogonal $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na base canónica. Qual é a representação matricial de $P_{E^\perp}$?
(e) Calcule o ponto de E mais próximo de $e_3 = (0,0,1)$.
(f) Calcule a distância de $v = (2,0,1)$ a $E^\perp$.

Resolução (a) Sejam $u = (x,y,z), u' = (x',y',z'), v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O axioma da simetria verifica-se porque $\langle u, v\rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc = 2ax + bx + ay + by + cz = \langle v, u\rangle$. Por outro lado,

$$\langle \lambda u + u', v\rangle = 2(\lambda x + x')a + (\lambda x + x')b + (\lambda y + y')a + (\lambda y + y')b + (\lambda z + z')c = \lambda\langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$$

pelo que o axioma da linearidade é verificado. Finalmente, falta provar o axioma da positividade, i.e. $\langle u, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ e $\langle u, u\rangle = 0$ sse $u = (0,0,0)$. Para esse fim, é suficiente observar que $\langle u, u\rangle = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = x^2 + (x+y)^2 + z^2$.

Resolução alternativa de (a): comece por notar que $\langle u, v\rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
pelo que a simetria e a linearidade são óbvias. Para provar a positividade, é suficiente aplicar o critério: $A = A^t$, $\det[2] > 0$, $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$ e $\det A > 0$
(ou então verifique que os valores próprios de A são <u>todos</u> positivos).
(b) Note, em primeiro lugar, que $\{e_1, e_2\}$ é uma base de E. Aplicamos de seguida o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter a base ortogonal $\{w_1, w_2\}$:
$w_1 = e_1$
$w_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 = (\frac{-1}{2}, 1, 0)$.
(c) Por definição $E^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u, e\rangle = 0, \text{ para todo o } e \in E\}$. Como e_1, e_2 geram E,

$$E^\perp = \{u = (x,y,z) : \ \langle u, e_1\rangle = 0 = \langle u, e_2\rangle\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0 = x + y\} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde $e_3 = (0,0,1)$ base (ortogonal) de $E^\perp$.
(d) Note que $P_{E^\perp}(e_1) = (0,0,0) = P_{E^\perp}(e_2)$ porque e_1, e_2 pertencem a $(E^\perp)^\perp = E$. Mais, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3$ porque $e_3 \in E^\perp$. Logo a matriz $\mathcal{P}_{E^\perp}$ que representa $P_{E^\perp}$ é $\mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $P_E + P_{E^\perp} = I$, a matriz $\mathcal{P}_E$ que representa P_E na base canónica é $\mathcal{P}_E = I - \mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) O ponto de E mais próximo de $e_3 = (0,0,1)$ é dado por $P_E(e_3)$. Por (d), $\mathcal{P}_E(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Donde $P_E(e_3) = (0,0,0)$. Ou então, como $e_3 \in E^\perp$, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3, P_E(e_3) = (0,0,0)$.
(f) A distância é dada por

$$\mathrm{dist}(v, E^\perp) = ||P_E(v)|| = ||(2,0,0)|| = \sqrt{\langle (2,0,0), (2,0,0)\rangle} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

1.16 Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e sejam $E{=}L\big((1,0,0,1),(0,1,1,1)\big)$, $F{=}L((1,0,0,1))$.
(a) Será que $E^\perp \subseteq F^\perp$? Calcule $\dim E$, $\dim E^\perp$, $\dim F$ e $\dim F^\perp$.
(b) Determine base ortogonal para E.
(c) Determine base ortogonal para $E^\perp$ (o complemento ortogonal de E).
(d) Calcule a distância de $p=(1,1,0,0)$ a F.
(e) Encontre as equações cartesianas da recta $\mathcal{R}$ paralela a F que passa no ponto $p=(1,1,0,0)$.
(f) Encontre as equações do 2-plano $\mathcal{P}$ que passa no ponto $p=(1,1,0,0)$ e é perpendicular a E.
(g) Encontre a matriz que representa $P_{F^\perp}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ na base canónica. Verifique que $P_{F^\perp}\circ P_{F^\perp}=P_{F^\perp}$.

Resolução (a) Sim, porque $F\subset E$. Temos que $\dim E=\dim E^\perp=2$, $\dim F=1$ e $\dim F^\perp=3$.
(b) Sendo $v_1=(1,0,0,1), v_2=(0,1,1,1)$ base para E, vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Scmidt para obter uma base ortogonal $\{w_1,w_2\}$ para E:
$w_1=v_1=(1,0,0,1)$
$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1=(\frac{-1}{2},1,1,\frac{1}{2})$.
(c) Em primeiro lugar temos que encontrar uma base $\{s_1,s_2\}$ de $E^\perp$, e de seguida apelar ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal $\{t_1,t_2\}$ de $E^\perp$.

Como v_1,v_2 geram E,

$$E^\perp=\{u=(x,y,z,w):\langle u,v_1\rangle=0=\langle u,v_2\rangle\}=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

cuja base é $s_1=(-1,-1,0,1)$ e $s_2=(0,-1,1,0)$. Finalmente, aplicando Gram-Schmidt:
$t_1=s_1=(-1,-1,0,1)$
$t_2=s_2-\frac{\langle s_2,t_1\rangle}{\langle t_1,t_1\rangle}t_1=(0,-1,1,0)-\frac{1}{3}(-1,-1,0,1)=(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},1,\frac{-1}{3})$.
(d) A distância de p a F é $\mathrm{dist}(p,F)=||P_{F^\perp}(p)||$. Agora ou se usa uma base ortonormada $\{u_1,u_2,u_3\}$ de $F^\perp$ e então[1] $P_{F^\perp}(p)=\langle p,u_1\rangle u_1+\langle p,u_2\rangle u_2+\langle p,u_3\rangle u_3$, ou se usa o facto de $P_F+P_{F^\perp}=I$, i.e.

$$P_{F^\perp}(p)=p-P_F(p)=p-\frac{\langle p,(1,0,0,1)\rangle}{\langle(1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1)=(\frac{1}{2},1,0,\frac{-1}{2}).$$

Portanto $\mathrm{dist}(p,F)=\sqrt{6}/2$.
(e) Primeiro vamos encontrar uma base para $F^\perp$. Como estamos a usar o produto usual de $\mathbb{R}^4$, temos que $F^\perp=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}$, cuja base é $\{(-1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$. Donde $F=\{(x,y,z,w): -x+w=0, y=0, z=0\}$. Como a recta $\mathcal{R}$ é paralela a F, as equações de $\mathcal{R}$ obtêm-se das de F impondo a condição $p\in\mathcal{R}$ (originando eventualmente equações não homogénias). Facilmente se constata que as equações cartesianas de $\mathcal{R}$ são: $-x+w=-1, y=1, z=0$.

Note que $F=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.
(f) Vimos em (b) que $\{(1,0,0,1),(0,1,1,1)\}$ é uma base de E, pelo que as equações cartesianas de $E^\perp$ são: $x+w=0, y+z+w=0$. Como o 2-plano $\mathcal{P}$ é paralelo a $E^\perp$ e $p\in\mathcal{P}$, concluimos que as equações cartesianas de $\mathcal{P}$ são: $x+w=1, y+z+w=1$.

[1] Recorde que dada uma base *ortonormada* $\{u_i\}$ de um espaço E, $P_E(w)=\sum_i\langle w,u_i\rangle u_i$. De forma similar, dada uma base *ortonormada* $\{v_j\}$ de $E^\perp$, $P_{E^\perp}(w)=\sum_j\langle w,v_j\rangle v_j$. Mais: $P_E(w)+P_{E^\perp}(w)=w$ para todo o vector w.

(g) Como dim$F$ é menor que dim$F^\perp$, vamos encontrar a matriz que representa P_F e depois usa-se o facto de $P_{F^\perp} = I - P_F$. Sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $P_F(e_i) = \frac{\langle e_i,(1,0,0,1)\rangle}{\langle(1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1)$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Pelo que

$$P_F(e_1) = (1/2, 0, 0, 1/2),\ P_F(e_2) = (0, 0, 0, 0),\ P_F(e_3) = (0, 0, 0, 0),\ P_F(e_4) = (1/2, 0, 0, 1/2).$$

Pelo que a matriz que representa $P_{F^\perp}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

1.17 Seja E um espaço Euclideano de dimensão n, F um subespaço linear de E, $P_F : E \to E$ a projecção ortogonal sobre F e $\mathcal{P}_F$ a matriz que representa P_F numa base de E.
(a) Prove que o conjunto dos valores próprios de P_F é um subconjunto de $\{0, 1\}$.
(b) Será $\mathcal{P}_F$ diagonalizável?

Resolução: Se $F{=}E$ ou $F{=}\{0_E\}$ o exercício é trivial. Para fazer os outros casos observe que se λ é valor próprio de P_F então λ^2 também é valor próprio de P_F^2. De seguida use o facto de $P_F^2{=}P_F$. Finalmente $\mathcal{P}_F$ é diagonalizável, tomando, p. ex., a base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_{F^\perp}$ de E, onde $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_{F^\perp}$) é uma base de F (resp. $F^\perp$). Indique então S e D tais que $S^{-1}\mathcal{P}_F S = D$, com D matriz diagonal.

1.18 Prove que a distância de um ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $\mathcal{P}_d$ de equação $ax + by + cz = d$ é

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}.$$

Resolução: O plano $\mathcal{P}_0$ que passa na origem $(0, 0, 0)$ e é paralelo a $\mathcal{P}_d$ tem equação cartesiana dada por $ax+by+cz = 0$. Por outro lado $\{(a, b, c)\}$ é uma base para o complemento ortogonal $\mathcal{P}_0^\perp$ e $(0, 0, d/c) \in \mathcal{P}_d$ se $c \neq 0$. Note que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, pelo que se $b \neq 0$, podemos usar o ponto $(0, d/b, 0) \in \mathcal{P}_d$, ou ainda $(a/d, 0, 0) \in \mathcal{P}_d$ se $a \neq 0$. Portanto (denotando por $P_{\mathcal{P}_0^\perp}$ a projecção ortogonal sobre $\mathcal{P}_0^\perp$) temos

$$\mathrm{dist}\Big((x_0, y_0, z_0), \mathcal{P}_d\Big) = ||P_{\mathcal{P}_0^\perp}((x_0, y_0, z_0) - (0, 0, d/c))|| = ||\frac{\langle (x_0, y_0, z_0 - d/c), (a, b, c)\rangle}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)||$$

donde o resultado.

1.19 Seja $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja matriz na base canónica é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Prove que $p(x) = 1 - x^2$ e $q(x) = 1 - 2x + x^2$ são vectores próprios de T. Indique os valores próprios associados.
(b) Verifique se T é diagonalizável.

1.1 Resolução de alguns exames

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (04/NOVEMBRO/2005)
LEIC-Alameda Duração: 1h:30m

Nome do Aluno:____

Número do Aluno:____

Curso:____________________________________ **Turma:**________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
TOTAL		

GRUPO I (4 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**

1. Seja $\mathcal{S}_\gamma$ o sistema de equações lineares representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \gamma \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\gamma^2 \end{bmatrix}$$

onde γ é um parâmetro real. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Existem infinitos valores de γ para os quais o sistema de equações $\mathcal{S}_\gamma$ é possível.

B) Existe exactamente um valor de γ para o qual o sistema é possível.

C) Existem exactamente dois valores de γ para os quais o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e tem grau de indeterminação 2.

D) Existe mais do que um valor de γ para os quais o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e tem grau de indeterminação 1.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B tal que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   II) $\mathrm{Nuc}(B) = \{(0,0)\}$.

   III) $\mathrm{Nuc}(A + B^{-1}) = \mathrm{Nuc}(A) + \mathrm{Nuc}(B^{-1})$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** I e II **D)** III

3. Considere o espaço linear $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$ e os vectores $v_1 = (1,-1,1,-1), v_2 = (-1,-2,3,0)$, $v_3 = (0,0,1,-1)$ e $v_4 = (0,-3,4,-1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

   II) Os vectores v_1, v_2, v_3, v_4 geram V, mas não geram $\mathbb{R}^4$.

   III) A dimensão de V é 3 (isto é, $\dim(V) = 3$).

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II **B)** II e III **C)** III **D)** I e III

4. Seja $W = L(\{v_1, v_2\})$ o espaço gerado pelos vectores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (0,-1,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se $(1,2)$ são as coordenadas do vector $u \in W$ na base $\{v_1, v_2\}$, então $u = (1,-1,3)$.

   II) O conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ constitui uma base para W.

   III) Existe um vector v_3 de $\mathbb{R}^3$ tal que $v_3 \notin W$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e III **B)** II e III **C)** I e III **D)** I e II

Nesta parte, Grupos II e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4,5 valores)

Para cada parâmetro real k, seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$, $\quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad$ e $\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

a) Discuta a característica de A_k em função do parâmetro k.

b) Faça a discussão das dimensões do espaço das colunas e do núcleo de A_k.

c) Determine uma base para $\text{Nuc}(A_{-1})$ (onde A_{-1} é a matriz A_k para $k = -1$).

d) Verifique se $(2, 1, 0)$ é solução do sistema linear $A_{-1}u = b$. Encontre o conjunto solução de $A_{-1}u = b$.

GRUPO III (1,5 valores)

Seja $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o espaço linear das funções reais de variável real munido com as operações habituais. Considere os subconjuntos E_+ e F de E definidos como se segue:
$E_+ = \{f \in E : f(x) > 0, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}\}$,
$F = \{g \in E : \ g(x) = \log(f(x)), \ \text{ para alguma função } f \in E_+\}$.

a) Prove que E_+ não é subespaço linear de E.

b) Prove que F é subespaço linear de E.

Resolução do Teste

Escolha múltipla: Grupo I

A chave para esta versão de teste é:

1	**2**	**3**	**4**
D	**C**	**B**	**A**

Problema 1. Aplicando o método de eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma^2 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\gamma^2 \end{array}\right].$$

Portanto o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível se e só se $2 - \gamma^2 = 0$. Em ambos os casos $\gamma = \pm\sqrt{2}$ cada sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e determinado. Além disso, para estes casos o número de variáveis livres é igual a 1 = grau de indeterminação. O sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é impossível para cada γ tal que $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$. Portanto a única afirmação verdadeira é a afirmação D).

Problema 2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que a afirmação I) é verdadeira. A afirmação II) é verdadeira porque a matriz B é invertível. Finalmente a afirmação III) é falsa, pois $\text{Nuc}(A)$+$\text{Nuc}(B^{-1}) = \{(0,0)\}$ uma vez que A e B^{-1} são matrizes invertíveis e

$$\text{Nuc}(A + B^{-1}) = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que não sendo uma matriz invertível o seu núcleo é diferente do vector nulo (ver teorema 30 das aulas teóricas).

Problema 3. A afirmação I) é falsa, porque se considerar a matriz A cujas colunas são formadas pelos vectores v_1, v_2, v_3 e v_4, a sua característica é 3 e não 4. A afirmação II) é verdadeira:

$$V = \{(x,y,z,w): \; x = -y-z-w\} = \{(-y-z-w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{y(-1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(-1,0,0,1)\}$$

pelo que dim$(W) = 3$. Como a car$(A) = 3$ onde A é a matriz anterior e $v_1, v_2, v_3, v_4 \in W$ concluimos que eles geram W, embora não sejam linearmente independentes. A dim$(\mathbb{R}^4) = 4$ e car$(A) = 3$, pelo que eles não podem gerar $\mathbb{R}^4$

A afirmação III) também é verdadeira -- ver cálculos na afirmação II).

Problema 4. A afirmação I) é verdadeira porque $u = \mathbf{1}v_1 + \mathbf{2}v_2$. A afirmação II) é verdeira porque dim$(W) = 2$ e os vectores $v_1 + v_2 = (1,0,2)$ e $v_1 - v_2 = (1,2,0)$ são linearmente independentes (considere a matriz A cujas colunas são os vectores $(1,0,2)$ e $(1,2,0)$. A car$(A) =$ 2=número de vectores).

Finalmente, a afirmação III) também é verdadeira, basta considerar a matriz B cujas colunas são os vectores v_1, v_2 e $v_3 = (a,b,c)$ e discuta a característica de B em função dos parâmetros a, b e c. Há casos em que car$(B) = 3$, por exemplo $v_3 = (1,0,0)$ é um vector que não pertence a W e é tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Grupo II

Aplicando sucessivamente o método de eliminação de Gauss obtém-se a matriz A'_k em escada de linhas como se segue:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \\ -kL_1+L_3 \\ -kL_1+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-(1+k)L_2+L_3 \\ -k(1+k)L_2+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix} \underset{-L_3+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: A'_k.$$

a) Portanto, por definição de característica, temos car$(A_k) = \begin{cases} 3, & k \notin \{-1,1\} \\ 2, & k = -1 \\ 1, & k = 1 \end{cases}$.

b) Seja $\mathcal{C}_{A_k}$ o espaço gerado pelas colunas de A_k. Usando o teorema 26 das aulas teóricas:

$$\dim(\mathcal{C}_{A_k}) = \mathrm{car}(A_k)$$

para todo o k. Usando novamente o teorema 26 e a alínea a) temos:

$$\mathrm{dimNuc}(A_k) = \text{número de } \underline{\text{colunas}} \text{ de } A_k - \mathrm{car}(A_k) = 3 - \mathrm{car}(A_k) = \begin{cases} 0, & k \notin \{-1,1\} \\ 1, & k = -1 \\ 2, & k = 1 \end{cases}.$$

c) $\mathrm{Nuc}(A_{-1}) = \mathrm{Nuc}(A'_{-1}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x-y-z = 0, \; 2y = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = z, \; y = 0\} = \{(z,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

Como, para cada esclalar z, $(z,0,z) = z(1,0,1)$ conclui-se que o vector $(1,0,1)$ gera Nuc(A_{-1}). Além disso, $(1,0,1)$ é um vector linearmente independente, portanto o conjunto $\{(1,0,1)\}$ é uma base de Nuc(A_{-1}).

d) Facilmente se verifica que $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Usando c) e o teorema 6 das aulas teóricas temos que o conjunto solução S de $A_{-1}u = b$ é

$S = (2,1,0) + \{(x,0,x) : \ x \in \mathbb{R}\} = \{(x+2,1,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
Resolução alternativa: pode aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $[A_{-1}|b]$ e chegar ao mesmo resultado. Note que o sistema $A_{-1}u = b$ não é equivalente ao sistema $A'_{-1}u = b$!!!)

Grupo III

a) O ''vector nulo'' do espaço linear E é a função constante igual a zero. Esta função não pertence ao conjunto E_+, portanto E_+ não é subespaço linear de E.
b) (i) O ''vector nulo'' pertence a F, uma vez que $0 = \log(1)$ onde 1 é função constante igual a 1.
(ii) Se $g_1 = \log(f_1)$ e $g_2 = \log(f_2)$ onde $f_1, f_2 \in E_+$, então

$$(g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) = \log(f_1(x)) + \log(f_2(x)) = \log\Big(f_1(x)f_2(x)\Big) = \log\Big((f_1f_2)(x)\Big), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que $(g_1 + g_2)(x) = \log\big((f_1f_2)(x)\big)$ e portanto $g_1 + g_2 \in F$.
(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g = \log(f) \in F$. Como

$$(\lambda g)(x) = \lambda g(x) = \lambda \log(f(x)) = \log(f(x)^\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que $(\lambda g)(x) = \log(f(x)^\lambda)$ e portanto $\lambda g \in F$. Por um resultado das aulas teóricas F é subsespaço linear de E. QED

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (19/JANEIRO/2006)

Cursos: LEC, LEIC-Alameda, LEN e LET Duração: 3h

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**___________________
Advertência: há 8 enunciados parecidos....mas distintos.

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo III (c)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Sejam $A_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \\ \gamma & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ onde $\gamma \in \mathbb{C}$ é um parâmetro complexo. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Existe um único valor de γ para o qual $\mathrm{car}(A_\gamma) \neq 3$.

   II) O sistema $A_\gamma x = b$ é determinado para infinitos valores de γ.

   III) O sistema $A_\gamma x = b$ é possível para qualquer valor de γ.

   IV) O sistema homogéneo $A_\gamma x = 0$ é possível para qualquer valor de γ.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II e IV **B)** II e III e IV **C)** I e III e IV **D)** I e II

2. Considere o espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det(M) = 0\}$ não é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   II) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \frac{1}{3}M = M^T\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensão 0.

   III) Existe uma transformação linear $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ injectiva.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** II **C)** I **D)** III

3. Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 0\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(U) = 2$ e $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base de U.

   II) O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 0, 3)\}$ é uma base de U.

   III) $U = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   IV) $U = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II e IV **B)** I e III **C)** I e IV **D)** II e III

4. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seja $A = \begin{bmatrix} \beta + 3 & 0 & \beta \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det\left((2A)^2\right) = 4\det(A)^2$ para qualquer valor de β.

   II) A é invertível para qualquer valor de β.

   III) $\det(A)$ não depende do valor de α.

   IV) O valor $\lambda = 3$ é um valor próprio de A para quaisquer valores de α e β.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e IV **B)** III e IV **C)** II e III **D)** III

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ um produto interno e $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^4$. Denote por F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores u_1 e u_2. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $||u_1 + u_2 + u_3 + u_4|| = \sqrt{2}$ para algum produto interno.

   II) $||u_1 + u_2 + u_3 + u_4|| = 2$, independentemente do produto interno.

   III) $\dim(F^{\perp})$=1.

   IV) $\{u_3, u_4\}$ é uma base ortogonal de $F^{\perp}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III e IV **C)** II e IV **D)** I e IV

6. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação definida como se segue $T(p(x)) = p(x+1)$.

   I) T não é uma transformação linear.

   II) $p(x) = 1 + x + x^2$ é uma solução da equação linear $T(p(x)) = 3 + 2x + x^2$.

   III) A transformação linear T é bijectiva.

   IV) O polinómio $p(x) = 3$ é um vector próprio de T.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** III **D)** III e IV

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (3 valores)

Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o espaço linear $E = L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 1, 2)$.

a) Determine bases ortogonais para E e para $E^{\perp}$.

b) Calcule a distância de $u_0 = (2, 1, 0, 1)$ a $E^{\perp}$.

GRUPO III (5 valores)

Para cada parâmetro $\gamma \in \mathbb{R}$, seja $T_\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T_\gamma\big((x, y, z)\big) = (\gamma x + 2z, -y + 2z, z).$$

a) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual T_γ é representada pela matriz $A_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Identifique o conjunto dos valores de γ para os quais T_γ é diagonalizável. Para $\gamma = -1$, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T_{-1}.

c) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T_\gamma\big((x, y, z)\big) = (2, 2, 1)$.

GRUPO IV (3 valores)

Considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica $A = A^T$.

a) Prove que vectores próprios associados a diferentes valores próprios de A são ortogonais.

b) Prove que existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A.

Resolução do Exame

Grupo I

A chave para esta versão de exame é:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	**A**	**A**	**B**	**C**	**D**

Grupo II

a) Seja A a matriz cujas linhas são formadas pelos vectores v_1, v_2, v_3 e v_4. Portanto $E = L_A$ é o espaço linhas de A enquanto $E^\perp = \mathrm{Nuc}(A)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss obtém-se a matriz A' em escada de linhas como se segue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \\ -L_1+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_3+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Como car(A)=3, dim$(E) = 3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de E. Vamos aplicar a esta base o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortogonal de E:
$w_1 = v_1 = (1, 0, 0, 1)$,
$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_2 - \frac{0}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_2 = (1, 1, -1, -1)$,
$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (0, 0, 1, 1) - \frac{-2}{4}(1, 1, -1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Vamos de seguida encontrar uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$. Note que como dim$(E) = 3$ e dim(E)+dim$(E^\perp)$ =dim$(\mathbb{R}^4)$ concluimos de imediato que dim$(E^\perp) = 1$. Como v_1, v_2, v_3 é uma base de E

$$E^\perp = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ \langle (x, y, z, w), v_1\rangle = 0, \ \langle (x, y, z, w), v_2\rangle = 0, \ \langle (x, y, z, w), v_3\rangle = 0\},$$

portanto
$E^\perp = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x + w = 0, \ x + y - z - w = 0, \ z + w = 0\} =$
$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x = -w, \ y = w, \ z = -w\} = \{(-w, w, -w, w) : \ w \in \mathbb{R}\}$.
Portanto $\{u_1 = (-1, 1, -1, 1)\}$ é uma base (ortogonal) de $E^\perp$.

b) Por definição de distância, dist$(u_0, E^\perp) = ||P_E(u_0)||$, isto é, a norma da projecção ortogonal de u_0 sobre E. Sabemos que $P_E(u_0) = u_0 - P_{E^\perp}(u_0)$, portanto usando a base (ortogonal) $\{u_1\}$ de $E^\perp$ encontrada em a) obtém-se:

$$||P_E(u_0)|| = ||u_0 - P_{E^\perp}(u_0)|| = ||u_0 - \frac{\langle u_0, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1|| = ||u_0 - \frac{0}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1|| = ||u_0|| = \sqrt{6}.$$

Grupo III

a) Seja $Bc = \{e_1, \ e_2, \ e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Como temos
$T_\gamma(e_1) = (\gamma, 0, 0) = \gamma e_1 + 0e_2 + 0e_3$,
$T_\gamma(e_2) = (0, -1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$,
$T_\gamma(e_3) = (2, 2, 1) = 2e_1 + 2e_2 + 1e_3$,

podemos concluir que, por definição de representação matricial, a matriz $M(T_\gamma; Bc, Bc)$ que representa T_γ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz A_γ.

b) Como A_γ representa T_γ na base canónica de $\mathbb{R}^3$, os valores e vectores próprios da matriz A_γ coincidem com os valores e vectores da transformação linear T_γ. Seja $p(\lambda)$ o polinómio característico de A_γ. Então:

$$p(\lambda) = \det(A_\gamma - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \gamma-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (\gamma-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda),$$

uma vez que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto das entradas na diagonal principal. Portanto $\{-1, 1, \gamma\}$ são os valores próprios de A_γ. Temos 3 casos a considerar:

Caso 1: Se $\gamma \notin \{-1, 1\}$, então temos 3 valores próprios diferentes em $\mathbb{R}^3$, pelo que a matriz A_γ é diagonalizável. Note que nestes casos a multiplicidade algébrica (ma) de cada valor próprio é igual a 1 e portanto a multiplicidade geométrica (mg) de cada valor próprio também é 1. Em resumo:

valor próprio	ma	mg
-1	1	1
1	1	1
γ	1	1

Caso 2: Seja $\gamma = 1$. Então $\{-1, 1\}$ são os valores próprios de A_1 em que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 1 enquanto que a do segundo valor próprio é 2. Vamos determinar a multiplicidade geométrica do segundo valor próprio (a do primeiro é obviamente 1): o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é

$$E(1) = \mathrm{Nuc}(A_1 - 1I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como car$(A_1 - 1I) = 2$, dim Nuc$(A_1 - 1I) = 1$ e portanto a multiplicidade geométrica deste valor próprio é 1. Em resumo:

valor próprio	ma	mg
-1	1	1
1	2	1

pelo que a matriz A_γ para $\gamma = 1$ não é diagonaizável, pois a multiplicidades algébrica e geométrtica do valor próprio $\lambda = 1$ são diferentes.

Caso 3: Seja $\gamma = -1$. Então $\{-1, 1\}$ são os valores próprios de A_1 em que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 2 enquanto que a do segundo valor próprio é 1. Vamos determinar a multiplicidade geométrica do primeiro valor próprio O Espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$ é

$$E(-1) = \mathrm{Nuc}(A_{-1} - (-1)I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que a multiplicidade geométrica é igual a 2 (note que car$(A_{-1} - (-1)I) = 1$). Em resumo

valor próprio	ma	mg
-1	2	2
1	1	1

e portanto A_γ para $\gamma = -1$ é diagonalizável.

Conclusão: A_γ é diagonalizável se e só se $\gamma \neq 1$.

Finalmente para construirmos uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios teremos que determinar bases para os espaços próprios $E(-1)$ e $E(1)$ da matriz A_γ para $\gamma=-1$:

$$E(-1)=\mathrm{Nuc}(A_{-1}-(-1)I)=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix}=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z=0\}$$

pelo que $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é uma base para $E(-1)$;

$$E(1)=\mathrm{Nuc}(A_{-1}-I)=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ -x+z=0,\ \ -y+z=0\},$$

pelo que $\{(1,1,1)\}$ é uma base de $E(-1)$. Logo $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_{-1}.

c) Temos que encontrar a solução geral do sistema cuja matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\gamma&0&2&2\\0&-1&2&2\\0&0&1&2\end{array}\right].$$

Conclui-se facilmente que o conjunto solução é $S=\{(x,0,1):\ \ \gamma x=0\}$. Note que para $\gamma\neq 0$, $S=\{(0,0,1)\}$. Para $\gamma=0$, $S=\{(x,0,1):\ \ x\in\mathbb{R}\}$.

Grupo IV

a) Usando o produto interno usual verifique que

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,A^Tv\rangle$$

para qualquer matriz $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e quaisquer vectores $u,v\in\mathbb{R}^n$.

Suponha agora que $A=A^T$ e sejam u e v vectores próprios de A associados a valores próprios λ e μ, respectivamente, tal que $\lambda\neq\mu$. Então, usando a equação acima, $Au=\lambda u$, $Av=\mu v$ e o axioma da linearidade do produto interno, obtém-se:

$$\lambda\langle u,v\rangle=\langle\lambda u,v\rangle=\langle Au,v\rangle=\langle u,A^Tv\rangle=\langle u,Av\rangle=\langle u,\mu v\rangle=\mu\langle u,v\rangle$$

pelo que $\lambda\langle u,v\rangle=\mu\langle u,v\rangle$, isto é

$$(\lambda-\mu)\langle u,v\rangle=0.$$

Se $\langle u,v\rangle\neq 0$ então conclui-se que $\lambda=\mu$ o que é absurdo. Conclusão: $\langle u,v\rangle=0$, isto é u e v são vectores ortogonais.

b) Como A é uma matriz simétrica então A é diagonalizável. Portanto podemos construir uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A. Em seguida aplica-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a cada base de cada espaço próprio. Finalmente usa-se a alínea a) para garantir que se obtém uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A considerando todas as bases ortogonais dos espaços próprios.

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (19/JANEIRO/2007)

2^a fase, Alameda Duraçã o: 3H

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**__________________
Advertência: há 7 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 2 (1h30m de duração): problemas

I 4	I 5	I 6	II b	II c	II d	II e	IV b

Resolução

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
C	C	C	B	B	B

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(A) = -3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O escalar $a = 1$ é o único valor que satisfaz $\det(A) = -3$.

   II) O sistema $Au = b$ é impossível para algum a e alguma matriz coluna $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   III) $\det(-A) = -3$ e $\det(A^{-1}) = -1/3$.

   IV) car(A)=car($[A|b]$) para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, onde $[A|b]$ designa a matriz aumentada.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I e IV

   A afirmação I é falsa pois, $\det(A) = a^2 - 4$, portanto $a^2 - 4 = -3$ tem duas soluções diferentes.
   A afirmação II é falsa porque $\det(A) \neq 0$ implica que o sistema $Au = b$ é possível e determinado para qualquer b, e a única solução é $u = A^{-1}b$.
   A afirmação III é verdadeira porque: $\det(-A) = (-1)^2 \det(A)$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
   A afirmação IV é verdadeira, tendo $\det(A) \neq 0$, car(A)=2, logo car($[A|b]$)=2.

---

2. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ com $b \neq 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Se x_0 é solução de $Au = 0$ e x_1 é solução de $Au = b$, então $\pi x_0 - x_1$ é solução de $Au = b$.

   B) O sistema $Au = b$ é determinado se $\det(A) = 0$.

   C) $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A^2)$.

   D) Se b é solução de $Au = b$ então o escalar 1 não é valor próprio de A.

   A afirmação A é falsa, porque $A(\pi x_0 - x_1) = \pi A x_0 - A x_1 = \pi 0 - b = -b$, uma vez que $Ax_0 = 0$ e $Ax_1 = b$.
   A afirmação B é falsa, porque se $\det(A) = 0$ então A é não invertível e portanto $Au = b$ nunca será determinado.
   A afirmação C é verdadeira. Para provar que $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A^2)$ teremos que provar que dado $u \in \mathrm{Nuc}(A)$ então $u \in \mathrm{Nuc}(A^2)$. Mas se $u \in \mathrm{Nuc}(A)$, então $Au = 0$ o que implica $A^2 u = A0 = 0$ muliplicando a equação $Au = 0$ por A. Isto significa que $u \in \mathrm{Nuc}(A^2)$.
   A afirmação D é falsa, porque se b é solução de $Au = b$ então $Ab = b$. Como $b \neq 0$ concluimos que o escalar 1 é valor próprio de A (e b é um vector próprio associado a este valor próprio).

---

3. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ a base do subespaço linear W de $\mathbb{R}^3$, onde $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,0,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $(1,2,1) \in W$.

   II) $W = \{(x,y,z) : \ x - z = 0\}$.

   III) As coordenadas v_B do vector $v = (2,3,2)$ na base B são $v_B = (2,1)$.

   IV) Se $v_B = (3,-1)$ são as coordenadas de v na base B, então $v = (2,3,2)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** II e III **C)** I, II e IV **D)** I, III e IV

A afirmação I é verdadeira, porque $(1,2,1) = (1,1,1) + (1,0,1)$, i.e. $(1,2,1)$ é combinação linear dos vectores da base dada de W.
A afirmação II é verdadeira, porque p.ex. dim(W)=2, $\dim\{(x,y,z) : \ x - z = 0\} = 2$ e os vectores $(1,1,1),(1,0,1) \in \{(x,y,z) : \ x - z = 0\}$, pelo que W tem diemsão 2 e é subespaço de um espaço de dimensaão 2.
A afirmação III é falsa, porque $(2,3,2) \neq 2v_1 + 1v_2$.
A afirmação IV é verdadeira, porque $(2,3,2) = 3v_1 - 1v_2$.

---

4. Considere a base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ onde $v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T;B,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1,1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) $T((2,3)) = (3,18)$.

   C) Zero não é valor próprio de T.

   D) T é injectiva.

A afirmação A é falsa, porque $(1,1) \in \mathrm{Nuc}(T)$ sse $1v_1 + 1v_2 \in \mathrm{Nuc}(A)$ onde A é a representação de T na base B. Mas $1v_1 + 1v_2 = (1,3)$ e $(1,3) \notin \mathrm{Nuc}(A)$.
A afirmação B é verdadeira. Para calcular $T((2,3))$ temos que em primeiro lugar encontrar as coordenadas v_B de $(2,3)$ na base B, depois Av_B fornece as coordenadas de $T((2,3))$ na base B, por definição de representação matricial. Concretamente, $(2,3) = 2v_1 - 1v_2$, $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ e finalmente

$$T((2,3)) = 3v_1 + 12v_2 = (3,18).$$

A afirmação C é falsa, porque os valores próprios de T e da matriz A são iguais e 0 é valor próprio da matriz uma vez que A é não invertível.
A afirmação D é falsa porque a injectividade de T é equivalente a verificar que $\dim\mathrm{Nuc}(A) = 0$. Todavia é óbvio que $\dim\mathrm{Nuc}(A) = 1$ (=número de colunas de A - car(A)).

---

5. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(-1) - p(1)x^2$ onde $\mathcal{P}_2$ designa o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $T(1 + x^2) = 2 - 2x^2$.

   II) $M(T;B,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, onde $B = \{1, x, x^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   III) T é sobrejectiva.

IV) $\{1-x^2, -1+x^2\}$ é uma base para a imagem de T.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e III **B)** I e II **C)** III e IV **D)** II e IV

A afirmação I é verdadeira, porque considerando $p(x) = 1 + x^2$, então $p(-1) = 2, p(1) = 2$, pelo que $T(1 + x^2) = 2 - 2x^2$.
A afirmação II é verdadeira, porque $T(1) = 1 - x^2 = 1 + 0x - 1x^2$ e assim obtém-se a primeira coluna da matriz, por definição de representação matricial. A segunda e terceira colunas resultam de $T(x) = -1-x^2$ e $T(x^2) = 1 - x^2$, respectivamente.
A afirmação III é falsa, porque T é sobrejectiva sse $\dim(\mathrm{Im}(T))=\dim(\mathcal{P}_2)$ porque $\mathcal{P}_2$ é o espaço de chegada de T. Ora $\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{car}(A)=2$ e $\dim\mathcal{P}_2 = 3$.
A afirmação IV é falsa, porque p.ex. os polinómios dados são linearmente dependentes.

6. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z = 0\}$ e $p = (1, 1, -2, 0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(W^\perp) = 1$.

II) $\mathrm{dist}(p, W^\perp)=0$.

III) $\mathrm{dist}(p, W)=0$.

IV) $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal de W.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e II **B)** I e III **C)** III e IV **D)** I, II, III e IV

A afirmação I é verdadeira, porque dim(W)=3, e portanto $\dim(W^\perp) = 1$.
A afirmação II é falsa, porque $p \in W$, portanto $\mathrm{dist}(p, W^\perp) = ||p||$.
A afirmação III é verdadeira, porque $p \in W$.
A afirmação IV é falsa, porque os vectores da lista formam de facto uma base de W, no entanto dois deles não são ortogonais.

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ é indeterminado se e só se $\alpha = 0$.
b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.
c) Para $\alpha = 2$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 2$).
d) Determine os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule o ângulo entre os vectores $u = (0, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$.
Resolução:
a) Usando a regra de Laplace na primeira coluna de A temos

$$\det(A) = \alpha \det \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha(4\alpha^2 - \alpha^2) = 3\alpha^3.$$

O sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ é indeterminado sse a matriz A for não invertível sse $3\alpha^3 = 0$. Logo $\alpha = 0$ é o único valor que torna o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ indeterminado.
b) O polinómio característico de A é, usando novamente a regra de Laplace na primeira coluna,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \alpha-\lambda & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 2\alpha-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha-\lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)\det \begin{bmatrix} 2\alpha-\lambda & \alpha \\ \alpha & 2\alpha-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(\alpha-\lambda)\Big((2\alpha-\lambda)^2 - \alpha^2\Big) = (\alpha-\lambda)(2\alpha-\lambda-\alpha)(2\alpha-\lambda+\alpha) = (\lambda-\alpha)^2(3\alpha-\lambda).$$

Portanto $\{\alpha, 3\alpha\}$ são os valores próprios de A.

c) Para $\alpha = 2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são $\{2, 6\}$ por b). Observe que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 2 (raiz dupla de $p(\lambda)$) enquanto que a multiplicidade algébrica do segundo valor próprio é 1. Vamos determinar bases para cada espaço próprio E_2 e E_6. Como $E_2 = \mathrm{Nuc}(A - 2I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, concluimos que

$$E_2 = \{(x,y,z) :\ 3y = 0, 2y + 2z = 0\} = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $\dim E_2 = 1$ (=multiplicidade geometrica) e $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_2. Para o segundo valor próprio obtém-se $E_6 = \mathrm{Nuc}(A - 6I) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Portanto

$$E_6 = \{(x,y,z) :\ -4x + 3y = 0, -2y + 2z = 0\} = \{(x,y,z) : x = \frac{3}{4}z, y = z\} = \{(\frac{3}{4}z, z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $\dim E_6 = 1$ e $\{(\frac{3}{4}, 1, 1)\}$ é uma sua base.
A matriz A (com $\alpha = 2$) não é diagonalizável uma vez que as muliplicidades algébrica e geometrica do primeiro valor próprio não são iguais.
d) A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ sse a matriz for simétrica $A = A^T$ e todos os valores próprios de A forem reais estritamente positivos.

Ora $A = A^T$ implica $\alpha^2 - 1 = 0$, i.e. A é simétrica somente para $\alpha \in \{-1, 1\}$. Finalmente usando b) concluimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ sse $\alpha = 1$.
e) Por definição o ângulo $\measuredangle(u, v)$ entre os vectores $u = (0,1,0)$ e $v = (0,0,1)$ é arccos $\frac{\langle u,v \rangle}{||u|| ||v||}$. Usando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ com $\alpha = 1$, veja d), temos $\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$,

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{2}$$ e analogamente $||v|| = \sqrt{2}$. Portanto, $\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

GRUPO III (4 valores)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as soluções de mínimos quadrados associadas ao sistema $A\mathrm{x} = b$.

b) Foi observado que os lucros obtidos pelo venda de um automóvel novo na União Europeia nas 3 primeiras semanas foram:

Semana	1	2	3
Lucros (em milhões de euros)	$1,5$	$0,5$	3

Vamos representar as semanas por x e o lucro semanal por y. Encontre a recta $y = \alpha + \beta x$ de mínimos quadrados relacionando x e y. Use a recta obtida para estimar os lucros na semana 6.

Resolução:

a) As soluções de mínimos quadrados de $A\mathrm{x} = b$ são as soluções do sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$, onde $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Neste caso, temos $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{23}{2} \end{bmatrix}$. Note que como as colunas de A são vectores linearmente independentes, existe uma única solução de mínimos quadrados. Tendo as matrizes $A^T A$ e $A^T b$ podemos recorrer, p.ex., ao método de eliminação para obter $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

b) Note que $1,5 = \frac{3}{2}$ e $0,5 = \frac{1}{2}$. Queremos determinar a recta $y = \alpha + \beta x$ que *melhor aproxima* os pontos $(1, \frac{3}{2}), (2, \frac{1}{2}), (3, 3)$, i.e. $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha + 2\beta = \frac{1}{2} \\ \alpha + 3\beta = 3 \end{cases}$. Portanto as matrizes dos coeficientes deste sistema são as matrizes A e b acima indicadas e a solução de mínimos quadrados da-nos a recta que melhor aproxima os dados da tabela (note que os sitema $A\mathrm{x} = b$ é impossível!). Por a) temos $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{3}{4}$. Portanto a recta é $y = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x$. Portanto para $x = 6$ temos $y = \frac{1}{6} + \frac{18}{4} = \frac{14}{3} \approx 4,66$ milhões de euros.

GRUPO IV (2 valores)

Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Considere o sistema linear $Au = b$ e designe por S_1 o seu conjunto solução. Seja ainda o sistema $A^T Av = A^T b$ e S_2 o seu conjunto solução.

a) Prove que $S_1 \subseteq S_2$.

b) Prove que $S_1 = S_2$ se $S_1 \neq \emptyset$.

Resolução:

a) Para provar que $S_1 \subseteq S_2$ temos que provar que dado $u \in S_1$ então $u \in S_2$. Ora isto é trivial uma vez que $Au = b$ implica $A^T Au = A^T b$, multiplicando $Au = b$ por A^T.

b) Por a) basta provar que $S_2 \subseteq S_1$. Seja $v \in S_2$. Queremos provar que $v \in S_1$. Como $S_1 \neq \emptyset$ concluimos que $b \in \mathcal{C}_A$ onde $\mathcal{C}_A$ designa o espaço gerado pelas colunas de A (note que $Av \in \mathcal{C}_A$ para qualquer vector v). Portanto $Av - b \in \mathcal{C}_A$.

Provamos agora que $Av - b \in \mathcal{C}_A^\perp$ o complemento ortogonal do espaço das colunas de A. Ora se $A^T Av = A^T b$ então $A^T(Av - b) = 0$ pelo que $Av - b \in \mathrm{Nuc}(A^T)$. Por outro lado $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathcal{C}_A^\perp$ (uma vez que $\mathcal{C}_A = \mathcal{L}_{A^T}$ e $\mathcal{L}_{A^T}^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T)$). Logo $Av - b \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_A^\perp$, mas $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_A^\perp = \{0\}$ pelo que $Av - b = 0$ logo $Av = b$, portanto $v \in S_1$. QED.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Sec cã o de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (19/OUTUBRO/2007)

LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:______________________________________**Curso:**______________________

Advertência: há 6 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Para cada parâmetro real α sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3\alpha \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

I) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para qualquer valor de α.

II) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para pelo menos um valor de α.

III) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível para qualquer valor de α.

IV) A matriz A_α é invertível para $\alpha = -3$.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I, II ☐ III, IV ☒ II, IV ☐ II, III

Resolução: Usando o método de eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & 3\alpha \end{array}\right] \underset{\substack{-4L_1+L_2 \\ -7L_1+L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3\alpha-21 & \alpha-7 \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-9 & 3\alpha-3 \end{array}\right]$$ e portanto

a afirmaç ao I é falsa, assim como III uma vez que $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para $\alpha = 3$.

---

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade 3×3. Considere as seguintes afirmações:

I) $(1, 0, 0)$ é solução do sistema homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

II) car(A^{-1})=3.

III) $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I, II ☒ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

Resolução: Como A é invertível, o sistema $Au = 0$ é possível e determinado, cuja única solução é $u = (0, 0, 0)$. Ou então verifique que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto I é falsa. A afirmação II é claramente verdadeira uma vez que sendo A invertível, $car(A) = car(A^{-1}) = 3$. A afirmação III é verdadeira porque $A - \lambda I$ é uma matriz triangular superior, pelo que so seu determinante é igual ao produto das entradas da diagonal principal de $A - \lambda I$ (que coincide com a expressão da afirmação III).

---

3. Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = 1$. Considere as seguintes afirmações:

I) $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

II) AB invertível se e só se B invertível.

III) Os sistemas homogéneos $(AB)u = \mathbf{0}$ e $Bu = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto solução.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I, II ☒ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

Resolução: A afirmação I é falsa: a equação correcta é $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. A afirmação II é equivalente a: $\det(AB) \neq 0$ sse $\det(B) \neq 0$. Mas como $\det(A) \neq 0$ e $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, concluimos que II é verdadeira. A afirmação II também é verdadeira porque dado que A é invertível $(AB)u = b$ sse $Bu = A^{-1}\mathbf{0}$ mas $A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ donde $Bu = \mathbf{0}$.

---

4. Escreva a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = (i - j)$ e determine A^{-1}.

`[0.7 valores]` Resolução: Temos $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

E facilmente concluimos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, usando p.ex. o método de Gauss-Jordan.

5. Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.
   a) Calcule $\det(A^T A)$ e verifique se $A^T A$ é invertível. `[1.0 valores]`
   b) Determine o conjunto solução do sistema linear $Au = b$. `[0.5 valores]`
   c) Determine o conjunto solução do sistema linear $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. `[0.5 valores]`

Resolução: por definição de transposta e produto matricial temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T A = A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Assim $\det(A^T A) = 11 - 9 = 2$. *Como* $\det(A^T A) \neq 0$ *concluimos que* $A^T A$ *é invertível.*

b) Usando o método de eliminação de Gauss facilmente concluimos que o sistema $Au = b$ é impossível, pelo que o conjunto solução deste sistema é $S = \emptyset$.

c) Podemos usar novamenteo método de eliminação de Gauss para concluir que o conjunto solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$ é $S = \{(0, 0)\}$. Mais fácil ainda: observar que a matriz $A^T A$ é invertível pelo que o sistema (homogéneo) $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$ é determinado, e que portanto o seu conjunto solução é $S = \{(0, 0)\}$.

6. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Designe por S_1 o conjunto solução de $Au = b$ e por S_2 o conjunto solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. Prove que $S_1 \subseteq S_2$. `[0.7 valores]`

Resolução: Temos que provar que $x_1 \in S_1 \Rightarrow x_1 \in S_2$, i.e. dado x_1 solução de $Au = b$, então o mesmo x_1 também é solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. De forma equivalente, temos que provar que:

$$Ax_1 = b \Rightarrow (A^T A)x_1 = A^T b.$$

Mas isto é trivial, pois basta multiplicar a equação matricial $Ax_1 = b$ pela matriz A^T para obter $(A^T A)x_1 = A^T b$, como pertendido. Como observação, note-se que pelo problema 5, podemos concluir que em geral $S_1 \neq S_2$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (04/DEZEMBRO/2007)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração o: 45m

Nome do Aluno:____

Número:_______________________________________**Curso:**______________________

Advertência: há 7 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{C}_A$ o espaço colunas de A. Considere as seguintes afirmações:

   I) O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = [0]\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

   II) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 1$.

   III) $\dim(\mathcal{C}_A) = 1$.

   IV) $\mathcal{C}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y = 0\}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, III ☐ II, IV ☐ II, III ☒ III, IV

Resolução: Usando o produto matricial $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = (x - 2y)(x + y)$, pelo que o conjunto dado na afirmação I não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$. Portanto I é falsa. Como car(A)=1, pelo que dim(Nuc(A))=n^0 de colunas de A-car(A)=3-1=2 e $\dim(\mathcal{C}_A) = car(A) = 1$. Portanto a afirmação II é falsa e a afirmação III é verdadeira. A afirmação IV é veradeira pois $\{(1,-2)\}$ é uma base para $\mathcal{C}_A$ ("colunas de A que correspondem às colunas com pivô na matriz final em escada de linhas") e por outro lado facilmente concluimos que o mesmo vector também é uma base para a recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y = 0\}$.

---

2. Seja $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,2,1)$ e $v_3 = v_1 + v_2$. Considere $U = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1, v_2 e $V = L(\{v_3\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_3. Considere as seguintes afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 geram $\mathbb{R}^3$.

   II) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes.

   III) $\dim(U + V) = 2$.

   IV) $\dim(U \cap V) = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II, III ☒ II, III, IV ☐ I, II ☐ III, IV

Resolução: Por definição o vector v_3 é combinação linear de v_1, v_2, portanto v_1, v_2, v_3 geram um plano em $\mathbb{R}^3$ (note que v_1 e v_2 não são colineares. Logo a característica da matriz 3x3 cujas colunas são os 3 vectores é igual a 3 – verifique!). Portanto a afirmação I é falsa. A afirmação II é verdadeira porque v_3 é combinação linear de v_1, v_2. Como $V \subseteq U$, temos que $U + V = U$ e $U \cap V = U$. Como dim(V)=1 e dim(U)=2, podemos concluir que as afrimações III e IV são verdadeiras.

---

3. As coordenadas v_B do vector $v = (3,2,0)$ na base ordenada $B = \{(1,1,-1),(1,0,2),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ são: ☐ $v_B = (1,2,0)$ ☒ $v_B = (2,1,0)$ ☐ $v_B = (1,0,2)$ ☐ $v_B = (0,1,2)$

Resolução: Sendo $v_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ as coordenadas de v na base B, então $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Facilmente determinamos que $\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 0$.

---

4. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau ≤ 2 na variável $\mathtt{x}$ e o seguinte subespaço linear $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : \ p(-2) = 0\}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $p(\mathtt{x}) = 1 + \mathtt{x} - \mathtt{x}^2 \in V$.

   II) $\dim(V) = 2$.

III) $\{2+\mathtt{x}, -4+\mathtt{x}^2\}$ é uma base de V.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I ☐ II ☐ III ☒ II, III

Resolução: Sendo $p(x) = 1 + x - x^2$, $p(-2) = 1 - 2 - (-2)^2 = 1 - 2 - 4 = -5$ portanto $p(-2) \neq 0$ logo a afirmação I é falsa. Dado um elemento $p(x) = a+bx+cx^2$ em $\mathcal{P}_2$, $p \in V$ sse $p(-2) = a-2b+4c = 0$, pelo que

$$p(x) = (2b - 4c) + bx + cx^2 = b(2 + x) + c(-4 + x^2)$$

portanto $\{2 + \mathtt{x}, -4 + \mathtt{x}^2\}$ gera V, como são linearmente independentes (não são colineares) concluimos que a afirmação III é verdadeira.

---

5. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A.
   b) Encontre bases para os espaços próprios de A
   c) Verifique se A é diagonalizável.

6. Seja $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o espaço linear das funções reais de variável real munido com as operações habituais. Considere $V =$L$(\{f_1, f_2\})$ o subespaço de E gerado pelas funções f_1, f_2, onde para cada $a, b \in \mathbb{R}$ define-se $f_1(t) = e^{at}$ e $f_2(t) = e^{bt}$. Determine $\dim(V)$, para cada a, b.

Resolução:

5 a) O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Como os zeros de $p(\lambda)$ são os valores próprios de A, concluimos que $\{1, 2\}$ são os valores próprios de A.

5 b) O espaço próprio associado a $\lambda = 1$ é

$$E(1) = Nuc(A - 1I) = Nuc \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Nuc \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$$

$$= \{(-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\},$$

pelo que $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $E(1)$.

O espaço próprio $E(2)$ associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é

$$E(2) = Nuc(A - 2I) = Nuc \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = Nuc \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y - z = 0\}$$

$$= \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$$

portanto $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base de $E(2)$.

5 c) Como $ma(1) = mg(1)$ e $ma(2) = mg(2)$ concluimos que a matriz A é diagonalizável. (onde ma designa a multiplicidade algébrica e mg a multiplicidade geométrica)

6) A resposta é dim(V)=$\begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 2 & \text{se } a \neq b \end{cases}$.

É óbvio que se $a = b$, então dim(V)=1, uma vez que neste caso $f_1 = f_2 \neq 0$.

Vamos então supor que $a \neq b$ e provar que f_1, f_2 são linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = 0, \text{para todo } t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Então fazendo $t = 0$ em $(*)$ obtém-se $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e por outro lado usando $t = 1$ em $(*)$ obtém-se $\alpha_1 e^a + \alpha_2 e^b = 0$. Ora a única solução destas duas equações é de facto a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ uma vez que $a \neq b$. (Verifique!!)

1.2 Exames sem resolução

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secç ao de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (24/JUNHO/2005)
(Semestre Alternativo, Alameda) Duraç ão: 3h

Nome de Aluno:____

Número de Aluno:____
Curso:__________________________________ **Turma:**_______________
Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por: **Aluno** **Docente**:

Pergunta	Resposta (página)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (1a)		
Grupo II (1b)		
Grupo II (1c)		
Grupo II (1d)		
Grupo II (1e)		
Grupo II (2a)		
Grupo II (2b)		
Grupo III		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1.5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Considere o espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ injectiva.

   II) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M \text{ é invertível}\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   III) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = -M^T\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensão 1.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II **C)** III **D)** I

2. Considere o espaço linear $V = L(\{v_1, v_2\})$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Considere ainda a base ordenada $B = \{v_1, v_2\}$ de V e a seguinte lista de afirmações:

   I) O vector de coordenadas em relação à base B do vector $v = (4, 4, 1) \in V$ é $(4, 4, 1)$.

   II) O vector de coordenadas em relação à base B do vector $v = (4, 4, 1) \in V$ é $(1, 3)$.

   III) O vector $v \in V$ cujo vector de coordenadas em relação à base B é $v_B = (1, -1)$ é $v = (0, 0, 1)$.

   IV) Os vectores $v_1, v_2, v_1 - v_2$ são linearmente independentes.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e IV **B)** III e IV **C)** II e III **D)** I e II

3. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A = -2$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 1+b \end{bmatrix} = -4$.

   II) 0 não é valor próprio de A.

   III) $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 2 \end{bmatrix} = 4$.

   IV) A é não-singular.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III e IV **B)** I e II e IV **C)** I e III **D)** II e IV.

4. Seja A uma matriz 2×2 invertível e a seguinte lista de afirmações:

   I) A matriz dos cofactores de A é invertível.

   II) A matriz A não tem duas linhas iguais.

   III) A matriz A não tem nenhum 0 na diagonal principal

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e III **B)** II e III **C)** I e III **D)** I e II

5. Seja $\langle , \rangle$ a aplicação que associa um escalar a cada par de vectores de $\mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma:

$$\langle (x, y), (a, b) \rangle = 3xa + xb + ya + yb.$$

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Esta aplicação define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em que, por exemplo, $||(1,0)|| = \sqrt{3}$.

B) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existem vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tais que $\langle u+v, w\rangle \neq \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

C) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existem vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $\langle u, v\rangle \neq \langle v, u\rangle$.

D) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existe um vector $u \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $\langle u, u\rangle \leq 0$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e os vectores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (-1,2,-1)$. Seja $E = L(\{v_1\})$ o espaço gerado por v_1. Considere ainda a seguinte lista de afirmações:

I) A dimensão do complemento ortogonal $E^\perp$ de E é 1, isto é, $\dim(E^\perp) = 1$.

II) O conjunto $\{v_1, v_2, v_1 - v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

III) Existe um vector $v \in E^\perp$ não nulo tal que a projecção ortogonal de v sobre E é v, isto é, $P_E(v) = v$ para algum $v \in E^\perp$ não nulo.

IV) A distância de v_1 a E é 0 e a distância de v_1 a $E^\perp$ é $\sqrt{3}$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e II e III **B)** II e IV **C)** I e III **D)** IV

Nesta parte do exame, II 1, II 2 e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (9 valores)

Considere, para cada parâmetro real γ, a matriz A_γ e o vector v_γ definidos por:

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad v_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. a) Determine o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, em função do parâmetro, tal que $A_\gamma v_\gamma = \lambda v_\gamma$.

b) Discuta as dimensões do $\mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ e do espaço $\mathcal{C}_{A_\gamma}$ gerado pelas colunas de A_γ, em função de γ.

c) Determine, em função de γ, bases para $\mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ e $\mathcal{C}_{A_\gamma}$.

d) Determine, em função de γ, os valores próprios de A_γ.

e) Identifique os valores de γ para os quais A_γ é diagonalizável.

2. Considere o espaço linear real $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 e a transformação linear $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathrm{tr}(X)$ designa o traço da matriz X (i.e., a soma das entradas da diagonal principal de X).

a) Determine γ tal que a matriz que representa T relativamente à base ordenada $\mathcal{B}c$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ seja A_γ, onde $\mathcal{B}c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e A_γ é a matriz introduzida no início do grupo II.

b) Resolva, em $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a equação linear $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

GRUPO III (2 valores)

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que qualquer vector (não nulo) é vector próprio de T. Denote por $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação identidade, i.e. $I(u) = u$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$. Prove que então existe um escalar λ tal que $T = \lambda I$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (08/JULHO/2005)
(Semestre Alternativo, Alameda) Duração: 3h

Nome do Aluno:____

Número do Aluno:____

Curso:_______________________________________ **Turma:**__________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (1a)		
Grupo II (1b)		
Grupo II (1c)		
Grupo II (1d)		
Grupo II (1e)		
Grupo II (2a)		
Grupo II (2b)		
Grupo III		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1.5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a dois munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(0)p(\mathrm{x}) = 2\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$.

   II) O conjunto $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(\mathrm{x}) = p(0)\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$ de dimensão 2.

   III) O conjunto $\{1 + \mathrm{x}, 1 - \mathrm{x} + \mathrm{x}^2, 2 + \mathrm{x}^2\}$ não gera $\mathcal{P}_2$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) III **B)** II **C)** I **D)** II e III

2. Considere E e F os subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$ definidos por: $E = L(\{v_1, v_2\})$ é o espaço gerado pelos vectores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, -1, 1, 1)$ e $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\}$. Considere ainda a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(E) = 2$ e $\dim(F) = 3$.

II) $\dim(E + F) = 3$.

III) $E \subseteq F$.

IV) $\dim(E \cap F) = 2$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e II **B)** I e III **C)** I e II e III e IV **D)** III e IV

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) A matriz A é diagonalizável.

II) Os vectores $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (-2, -1)$ são vectores próprios da matriz A.

III) $A = SDS^{-1}$.

IV) $D = SAS^{-1}$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) III **B)** I e IV **C)** I e II e III **D)** I e II e IV

4. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ uma matriz do tipo 2×2 com entradas nos inteiros $\mathbb{Z}$, $\det(A) = 1$ e $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Existe uma matriz B tal que o sistema $AX = B$ é indeterminado.

B) A solução de $AX = B$ é $X = BA^{-1}$, porque A é invertível.

C) $\det(A^k) = k \det(A)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

D) A matriz inversa de A também tem todas as entradas em $\mathbb{Z}$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y)$ e $A = M(T; Bc_{\mathbb{R}^3}, Bc_{\mathbb{R}^2})$ a representação matricial de T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

II) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

III) A transformação linear T é sobrejectiva.

IV) A transformação linear T é injectiva.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e IV **B)** I e III **C)** II e IV **D)** II e III

6. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$, $E = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a seguinte lista de afirmações:

I) A dimensão do complemento ortogonal $E^{\perp}$ é 2, isto é, $\dim(E^{\perp}) = 2$.

II) O conjunto $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ constitui uma base ortogonal de E.

III) O ângulo entre os vectores $v_1 = (0,1,1,0)$ e $v_2 = (0,1,0,0)$ é de $\pi/4$ radianos (i.e. 45^o).

IV) O conjunto $\{(0,1),(1,0)\}$ constitui uma base para o espaço das colunas $\mathcal{C}_A$ de A.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II e III e IV

Nesta parte, II 1, II 2 e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (9 valores)

Para cada parâmetro real β, seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A_\beta \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

1. a) Prove que a matriz A_β é singular se e só se $\beta \in \{-1,0,1\}$.

   b) Determine, em função de β, os valores próprios de A_β.

   c) Diga, justificando, para que valores de β a matriz A_β é diagonalizável.

   d) Para que valores de β a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$?

   e) Para os valores de β encontrados na alínea anterior, calcule $||(0,1,0)||$.

2. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a 2 e $\mathcal{B}c = \{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear tal que a matriz que representa T em $\mathcal{B}c$ é A_1 ($\beta = 1$), onde A_β é a matriz introduzida no início do grupo II.

a) Verifique se $q(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ é um vector próprio de T.

b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p) = \mathrm{x}$.

GRUPO III (2 valores)

Uma matriz $R \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ diz-se de rotação se $R^{-1} = R^T$ e $\det(R) = 1$, onde R^T designa a matriz transposta de R. Dada uma matriz de rotação $R \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$, prove que R fixa um vector $v \in \mathbb{R}^3$ não nulo (i.e., $Rv = v$ para algum $v \neq \mathbf{0}$).

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (05/JANEIRO/2006)

Cursos: LEC, LEIC-Alameda, LEN e LET Duração: 3h

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**___________________
Advertência: há 8 enunciados parecidos....mas distintos

Teste 2 (1h30m de duração) para alunos da LEIC: problemas

I 4	I 5	I 6	II a	II b	II c	IV b

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Seja $\mathcal{S}_\alpha$ o sistema de equações lineares representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \alpha \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é um parâmetro complexo. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Existem infinitos valores de α para os quais o sistema de equações $\mathcal{S}_\alpha$ é possível.

B) Existe mais do que um valor de α para os quais o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível e tem grau de indeterminação 1.

C) Existem exactamente dois valores de α para os quais o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível e tem grau de indeterminação 2.

D) Existe exactamente um valor de α para o qual o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) A matriz A é não invertível.

II) A entrada (1,4) da matriz inversa de A é igual a 0.

III) A matriz $\frac{1}{3}A^2$ é invertível.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II e III **C)** II **D)** III

3. Para cada k seja $V_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + ky = k^2 - 1, \quad kx + y = 1 - k\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto V_k é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$ para um único valor de k.

   II) $\dim(V_1) = 1$ e $\{(1,1)\}$ é uma base de V_1 (onde V_1 designa V_k fazendo $k = 1$).

   III) As coordenadas de $v = (a,b)$ na base ordenada $\{(1,1),(1,-1)\}$ são $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** I e III **C)** II e III **D)** III

4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 1 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(A) = 3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 4b & 8 & 16 \end{bmatrix} = -12$.

   II) $b \neq 2a$.

   III) $\det(-3A) = -9$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, v_1 e v_2 dois vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O vector $v_1 + v_2$ também é vector próprio de T.

   II) $\lambda_1 + \lambda_2$ é um valor próprio de T.

   III) A transformação T é diagonalizável.

   IV) T é invertível.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e IV **C)** I e II e III e IV **D)** III e IV

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x+2y, x-y, x, x-z)$ e $A = M(T; Bc_{\mathbb{R}^3}, Bc_{\mathbb{R}^4})$ a representação matricial de T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   II) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   III) A transformação linear T é sobrejectiva.

   IV) A transformação linear T é injectiva.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** I e III **D)** I e IV

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A_\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A_α, em função de α. Justifique que A_α é diagonalizável para cada α.

b) Encontre os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

c) Para os valores de α encontrados na alínea anterior, calcule a distância de $u_0 = (1,1,1)$ a $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 0\}$.

GRUPO III (4 valores)

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2, na variável x e $\{1, x, x^2\}$ a sua base canónica. Considere a transformação linear $T : \; \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial nas bases canónicas é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Determine bases para o núcleo e contradomínio de T.

b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação $T(p(x)) = (1,4,7)$.

GRUPO IV (3 valores)

Seja E um espaço Euclidiano real de dimensão finita, F um subespaço de E e $B_F = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ uma base de F. Considere $T : E \to E$ a transformação linear definida como se segue:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \, u_i, \qquad v \in E.$$

a) Prove que $\mathrm{Nuc}(T) = F^\perp$. Conclua que T é invertível se e só se $F = E$.

b) Seja λ um valor próprio de T. Prove que $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Sec cã o de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (08/FEVEREIRO/2007)
2^a fase, Alameda Duraçã o: 3H

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____ **Número:**____________
Curso:______________________________ **Turma:**____________________
Advertência: há 7 enunciados parecidos...mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo III (c)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
	TOTAL	

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

---

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se x_0 é solução de $A_\alpha u = b$, então $\alpha = 1$.
   II) Se x_1 é solução do sistema homogéneo $A_\alpha u = 0$, então $\alpha = 1$.
   III) Para $\alpha = 1$, $x_0 + kx_1$ é solução de $A_1 u = b$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
   IV) Se A_α for invertível, então $u = A_\alpha b$ é a única solução do sistema $A_\alpha^{-1} u = b$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I, II, III e IV

---

2. Considere os vectores $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Os vectores v_1 e v_2 geram uma recta em $\mathbb{R}^3$.
   B) O conjunto $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
   C) O vector $w = (1, 1, -2)$ é ortogonal a v_1 e a v_2.
   D) As coordenadas de $u = (5, 7, 9)$ na base $B = \{v_1, v_2\}$ de $L(\{v_1, v_2\})$ são $u_B = (3, 2)$.

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$, seja $A = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A^T A = \begin{bmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

   II) $A^T A$ é invertível para algum a.

   III) Existe mais do que uma solução de mínimos quadrados associada ao sistema $A^T u = b$, para algum $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   IV) A matriz AA^T é invertível para algum $a \in \mathbb{R}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II   **B)** II e III   **C)** III e IV   **D)** I e IV

---

4. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{P}_1$ designa o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 1, na variável $\mathtt{x}$. Bc designa base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1$, respectivamente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) T é injectiva.

   C) $T((2, 3)) = (5, 10)$.

   D) $T((2, 3)) = 5 + 10\mathtt{x}$.

---

5. Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, seja $A_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) A matriz A_γ é diagonalizável para algum γ.

   II) A matriz A_γ é diagonal para todo o γ.

   III) Se $u = (1, 0, 1) \in \mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ então $\gamma = -1$.

   IV) O vector $v = (0, 1, 0)$ é um vector próprio de A_γ, pois $A_\gamma v = 1v$ para todo o γ.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II e III   **B)** I, II e IV   **C)** III e IV   **D)** I, III e IV

---

6. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z = 0\}$ e $p = (1, 0, -1, 0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(W) = 3$.

   II) $\mathrm{dist}(p, W^\perp)$=0.

   III) $\mathrm{dist}(p, W)$=0.

   IV) $\{(0, 1, -1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal de W.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II   **B)** II e III   **C)** III e IV   **D)** I e III

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (5 valores)

Para cada α e β escalares reais, considere as matrizes $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$. Seja ainda $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que a sua representação matricial na base canónica é dada pela matriz A_1 (isto é, A_α tomando $\alpha = 1$).

a) Determine os valores de α e β para os quais $A_\alpha u = b_\beta$ é possível e indeterminado.

b) Determine o conjunto solução do sistema $A_1 u = b_1$, com $\alpha = \beta = 1$.

c) Verifique se T é injectiva ou sobrejectiva e determine uma base para a imagem de T.

d) Determine o ângulo $\measuredangle\Big(T(u), T(v)\Big)$ entre os vectores $T(u)$ e $T(v)$ onde $u = (1,1,1)$ e $v = (2,0,2)$, usando o produto interno usual.

GRUPO III (4 valores)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule a matriz inversa de P.

b) Determine os valores próprios de A, bases para cada espaço próprio e justifique que A é diagonalizável. Justifique também que temos $A = PDP^{-1}$, sem fazer cálculos.

c) Calcule a entrada $(3,2)$ da matriz A^{10}.

Resolução:

GRUPO IV (2 valores)

Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, e designe por $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_{BA}$ os espaços gerados pelas linhas de A e BA, respectivamente.

a) Prove que $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(BA)$ e $\mathcal{L}_{BA} \subseteq \mathcal{L}_A$.

b) Sendo B invertível, prove que $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(BA)$ e $\mathcal{L}_{BA} = \mathcal{L}_A$.

Resolução:

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (11/JANEIRO/2008)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 3H

Nome do Aluno:_______________________________ **Número:**__________

Curso:_______________________ **Turma:**_______________

Advertência: há 9 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 3 (1h30m de duração): problemas

I 5	I 6	I 7	I 8	II a	II b	II c	II d	IV b

GRUPO I (8 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é solução de $Au = b$, então $\alpha = 1$.

   II) O sistema $Au = b$ é possível e indeterminado para um único valor de α.

   III) O sistema $Au = b$ é possível e determinado para um único valor de α.

   IV) O sistema $Au = b$ é impossível para um único valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II **B)** III, IV **C)** I, IV **D)** II, III

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a^2 & -b \\ b & b \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 1$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det(PA) = \det(AP) = 1$.

   II) $\det(2A) = 2$.

   III) $\det\big((I + P)(A^3 + 2A^2 + I)\big) = 0$, onde I designa a matriz identidade 2×2.

   IV) A entrada (1,2) de A^{-1} é b.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III **B)** I, IV **C)** III, IV **D)** II, IV

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sejam $v_1 = (1, 0, 0, 2), v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 0, 1, a)$. Seja ainda $V = L(\{v_1, v_2, v_3\})$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes para um único valor de a.

   II) dim(V)=3 para $a \neq 2$.

   III) O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V para $a = 2$.

   IV) dim(V)=3 para qualquer valor de a.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III, IV **B)** I, II, III **C)** I, IV **D)** II, III

4. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(W) = 1$.

II) $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ é uma base de W.

III) $\{(1, 1, 1, 1)\}$ é uma base de $W^{\perp}$, usando o produto interno usual.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I, II **B)** II, III **C)** I, III **D)** I, II, III

---

5. Considere a base canónica Bc=$\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $(1, -1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

B) $T\big((2, 3)\big) = (2, -3)$.

C) O escalar $\lambda = 0$ é valor próprio de T.

D) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\measuredangle\Big(u, v\Big) = \measuredangle\Big(T(u), T(v)\Big)$, onde $\measuredangle$ designa o ângulo.

---

6. Sejam $v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), p = (1, 1, 1)$ e $E = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(E^{\perp}) = 1$.

II) $\{(1, 2, 1)\}$ é uma base de $E^{\perp}$.

III) $\{(-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ é uma base ortogonal de E.

IV) $\mathrm{dist}(p, E) = 0$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I, II, III **B)** II, III, IV **C)** I, III, IV **D)** I, II, III, IV

---

7. Seja F o espaço linear das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciáveis e $T : F \to F$ a aplição linear $T(f) = f'$, onde f' designa a derivada de f. Considere a lista de afirmações:

I) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = e^{ax}$ é um vector próprio de T.

II) Se f é um polinómio de grau 99, então $T(f)$ também é um polinómio de grau 99.

III) T é injectiva.

IV) O número de valores próprios de T é finito.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II **C)** III **D)** I, IV

---

8. Considere o sistema de equações diferenciais com valor inicial: $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = 8 \text{ e } y_2(0) = 5. \end{cases}$

A solução deste sistema é:

A) $y_1(t) = 3e^{3t} + 5e^{t},\ y_2(t) = 5e^{t}$ **B)** $y_1(t) = 8e^{t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$

C) $y_1(t) = 3e^{t} + 5e^{3t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$ **D)** $y_1(t) = 3e^{t} + 5e^{2t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$

GRUPO II (4 valores)

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas como se segue:

$$T_1\big((x,y)\big) = (5y, x-3y, -2y), \qquad T_2\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, x+2z).$$

a) Determine as representações matricias de T_1 e T_2 nas bases canónicas.
b) Determine bases para $\mathrm{Im}(T_1)$ e $\mathrm{Nuc}(T_2)$ e verifique que $\dim\big(\mathrm{Im}(T_1) \cap \mathrm{Nuc}(T_2)\big) = 0$.
c) Resolva a equação linear $T_2\big((x,y,z)\big) = (3,3)$.
d) Determine $T_2 \circ T_1\big((x,y)\big)$.

Resolução:

GRUPO III (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ \alpha^2-1 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se $\alpha = 0$.
b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.
c) Para $\alpha = 3$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 3$).
d) Determine os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule $||(0,1,0)||$.
Resolução:

GRUPO IV (3 valores)

Seja $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ um conjunto não vazio de vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, $E = L(S)$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ gerado por S e P_E a projecção ortogonal sobre E. Considere a matriz $A = [v_1 \; v_2 \cdots v_k] \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$ cuja coluna j é o vector v_j escrito em coluna, $j = 1, \cdots, k$, e seja $Q = A(A^TA)^{-1}A^T$.

a) Prove que $Q = Q^T$ e $Q^2 = Q$.

b) Prove que $P_E(u) = Q(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Resolução:

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (25/JANEIRO/2008)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**____________
Curso:____________________________ **Turma:**__________________
Advertência: há 5 enunciados parecidos...mas distintos

GRUPO I (8 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Existe pelo menos um valor de α tal que $(0,0,1)$ é solução de $Au = b$.

   II) A matriz A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$.

   III) O sistema $Au = b$ é possível e determinado para um único valor de α.

   IV) O sistema $Au = b$ é possível e indeterminado para um único valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} b & b \\ -b & a^2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 1$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $b = 0$.

   II) $\det(PA) = \det(AP) = 1$.

   III) $\det(2A) = 4$.

   IV) $\det\big((P - I)(A^3 - A^2 + I)\big) = 0$, onde I designa a matriz identidade 2×2.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$ e $v = (1,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\lambda = 0$ é valor próprio de A, para qualquer a.

   II) Se v é vector próprio de A, então $a = -1$.

   III) $p(\lambda) = \lambda^2 - (1+a)\lambda$ é o polinómio característico de A.

   IV) Se A tem um valor próprio duplo, então $a = 0$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

4. Sejam $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$ e $v_1 = (-1,1,0,0), v_2 = (-1,0,1,0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $v_1 \in W$.

   II) $\dim(W) = 3$.

   III) $\{v_1, v_2\}$ é uma base de W.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, III **B)** II, III **C)** I, II, III **D)** I, II

---

5. Considere a base canónica $Bc=\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $(1,1) \in \text{Nuc}(T)$.

B) $T\big((2,3)\big) = (-1,-5)$.

C) O escalar $\lambda = 0$ é valor próprio de T.

D) $T\big((x,x)\big) = (0,2x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

---

6. Sejam $v_1 = (-1,0,1), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,2,1)$ e $E = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(E^{\perp}) = 1$.

   II) $\{v_3\}$ é uma base de $E^{\perp}$.

   III) $\{v_1, v_1 + v_2\}$ é uma base ortonormada de E.

   IV) $\text{dist}(2v_3, E) = 2\big(\text{dist}(v_3, E)\big)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, IV **B)** I, III **C)** II, IV **D)** III, IV

---

7. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2, na variável x e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p) = p' - p$, onde p' designa a derivada de p. Considere a lista de afirmações:

   I) $T(1 + x + x^2) = x - x^2$.

   II) O polinómio nulo $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \notin \text{Nuc}(T)$.

   III) $\lambda = -1$ é um valor próprio de T.

   IV) O polinómio nulo $p(x) = 0 + 0x + 0x^2$ é vector próprio de T

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, IV **B)** I, III **C)** II, IV **D)** III, IV

---

8. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto solução da equação diferencial $y'(t) = 2y(t)$. Considere as seguintes funções $y_1(t) = e^{2t},\ y_2(t) = e^{2t} + \pi,\ y_3(t) = \pi e^{2t}, y_4(t) = e^{2t+\pi}$.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{S}$ **B)** $y_1, y_2, y_4 \in \mathcal{S}$ **C)** $y_1, y_3, y_4 \in \mathcal{S}$ **D)** $y_2, y_3, y_4 \in \mathcal{S}$

GRUPO II (6 valores)

Para cada parâmetro real α, sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o sistema $Au = b$ é possível se e só se $\alpha = -1$.

b) Justifique que o sistema $(A^T A)\hat{u} = A^T b$ é indeterminado para qualquer α.

c) Prove que que $F = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^3 : (A^T A)\hat{u} = A^T b\}$ é subespaço linear se e só se $\alpha = 1$.

d) Para cada α, determine todas as soluções de mínimos quadrados do sistema $Au = b$.

e) Determine $\text{dist}\big(A\hat{u}, C_A^{\perp}\big)$, onde $\hat{u}$ é uma solução de mínimos quadrados de $Au = b$ e $C_A^{\perp}$ designa o complemento ortogonal do espaço colunas C_A de A.

Resolução:

GRUPO III (4 valores)

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas como se segue:

$$T_1\big((x,y,z)\big) = (2x+z, y, x+z), \qquad T_2\big((x,y,z)\big) = (x-z, y, -x+2z).$$

Sejam A_1 e A_2 as representações matricias de T_1 e T_2, respectivamente, na base canónica de $\mathbb{R}^3$.
a) Determine A_1 e A_2.
b) Verifique que T_1 e T_2 são transformações lineares invertíveis.
c) Prove que os polinómios característicos de A_1 e A_2 são iguais e justifique que ambas são diagonalizáveis.
d) Verifique que $T_2^{-1}\big((x,y,z)\big) = T_1\big((x,y,z)\big)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Resolução:

GRUPO IV (2 valores)

Sejam A, B matrizes reais $n \times n$ e $\langle u, v\rangle = \sum u_i v_i$ o produto interno usual do espaço linear $E=\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tais que: $\langle u, v\rangle = \langle Au, Bv\rangle$, para quaisquer $u, v \in E$. Prove que A e B são matrizes invertíveis e que além disso temos $A^{-1} = B^T$.

2 Consultar exames em: http://www.math.ist.utl.pt/~ppinto/AL/exames.html